Autour de la fonction logarithme

1 Limites

a. Soit M un réel strictement positif. Montrer qu'il existe $A \in]0;+\infty[$ tel que pour tout réel $x > A$, $\ln(x) > M$.

b. Conclure sur la limite de la fonction logarithme en $+\infty$.

c. Montrer que pour $x > 0$, $\ln x = -\ln \dfrac{1}{x}$

d. Conclure sur la limite de la fonction logarithme en 0.

2 Approximations affines

a. Soit $a > 0$ un nombre réel fixé. Que représente la fonction $T_a : x \longmapsto \dfrac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$ pour la fonction logarithme ?
Déterminer la limite de T_a lorsque x tend vers a.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

c. Soit $a > 0$ un nombre réel fixé. Que représente la fonction $T_a : h \longmapsto \dfrac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h}$ pour la fonction logarithme ?
Déterminer la limite de T_a lorsque h tend vers 0.

d. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

e. Déterminer l'équation de la tangente Δ à la courbe de la fonction logarithme en 1.

f. Montrer que Δ est au dessus de la courbe de la fonction logarithme.

3 Croissances comparées

a. Déterminer la limite de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. On posera $X = \ln x$.

b. Déterminer la limite de la fonction $x \longmapsto x \ln x$ en 0 en utilisant un raisonnement similaire.

4 Dérivées

a. Soit $x \longmapsto u(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I.
Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

b. Déterminer le maximum de $f : x \longmapsto \ln(x^3 + 3x^2 + 2x) - x$ sur son domaine de définition.

5 Primitives

a. Soit $x \longmapsto u(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I.
Déterminer les primitives de $f : x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I.

b. Déterminer l'aire sous la courbe de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} - \dfrac{5}{7}$ entre $x = -\dfrac{1}{5}$ et $x = 2$.