Chapitre 23: Lois exponentielles et loi normale centrée réduite

1 Lois exponentielles

Définition:
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité de probabilité f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Propriété:
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, alors :

- *pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$:*
$$P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$
- *En utilisant l'événement contraire, $P(X > t) = 1 - P(X \geq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.*

Théorème:
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

On dit que une loi exponentielle est sans vieillissement ou sans mémoire.

Définition:
L'espérance mathématique (lorsqu'elle existe) d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle $[0;+\infty[$ est :

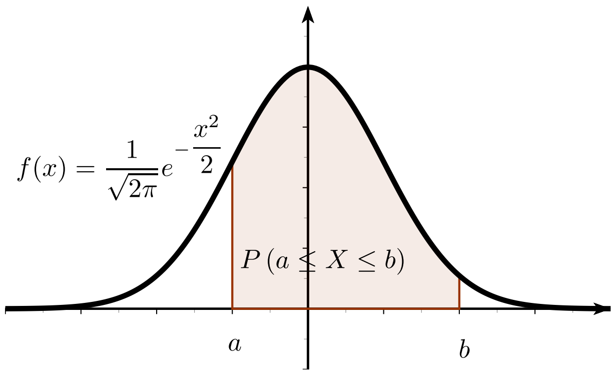
$$E(X) = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t x f(x) \mathrm{d}x$$

Théorème:
X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Son espérance mathématique est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

2 Loi normale centrée réduite

Définition:
Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ si, pour tous réels a et b, tels que $a < b$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$



On dit que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est le fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0;1)$

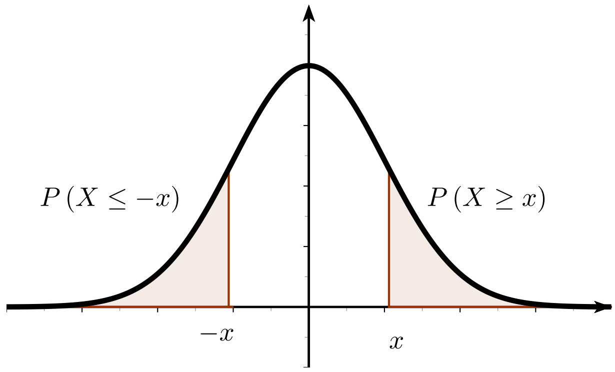
Propriété:
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. X admet donc f pour densité et :

- *L'aire totale sous la courbe de f est égale à 1, c'est à dire $P(X \in \mathbb{R}) = 1$;*
- *$E(X) = 0$; $V(X) = 1$ et $\sigma(X) = 1$.*

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (on dit que f est paire). On peut en déduire que :

Propriété:
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$:

- *$P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 0,5$;*
- *Pour tout réel x, $P(X \leq -x) = P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$;*



- *Pour tout réel x, $P(-x \leq X \leq x) = 2P(X \leq x) - 1$;*