Chapitre 26: Lois normales

1 Loi normale centrée réduite

Théorème:
*Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un **unique** nombre strictement positif u_α tel que :*

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Démonstration:
Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$ Cette fonction fait correspondre à un réel x l'aire sous la courbe de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;x]$. De plus,

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

Soit $\alpha \in]0;1[$, on cherche un nombre x strictement positif tel que $P(-x \leq X \leq x) = 1 - \alpha$. On a :

$$P(-x \leq X \leq x) = 2P(X \leq x) - 1 \iff 1 - \alpha = 2\Phi(x) - 1 \iff \Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Démontrer ce théorème revient à montrer que l'équation $\Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ admet une unique solution pour $\alpha \in]0;1[$. Or la fonction Φ a les propriétés ci-dessous :

- *Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;*
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \Phi(x) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$

On peut ainsi résumer ces propriétés dans le tableau de variation ci-dessous :

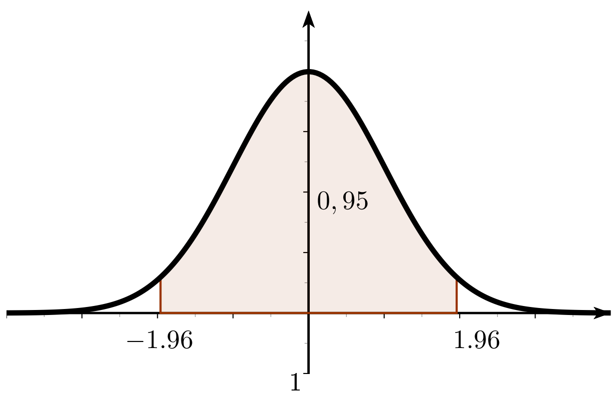
x	0	$+\infty$
$\Phi(x)$	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$	1

Or pour $\alpha \in]0;1[$, $1 - \frac{\alpha}{2} \in \left]\frac{1}{2};1\right[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $u_\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$

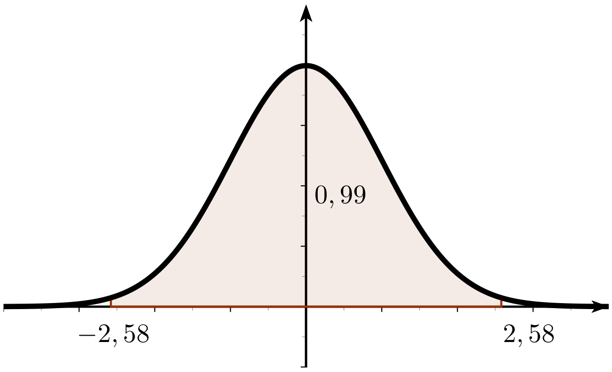
Remarque:
Ainsi u_α est l'unique antécédent de $\Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ donc $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Exemples:
Le théorème ci-dessus permet d'obtenir les résultats suivants (à connaitre) :

- $u_{0,05} \simeq 1,96$ *donc* $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \simeq 0,95$



- $u_{0,01} \simeq 2,58$ *donc* $P\left(-2,58 \leq X \leq 2,58\right) \simeq 0,99$

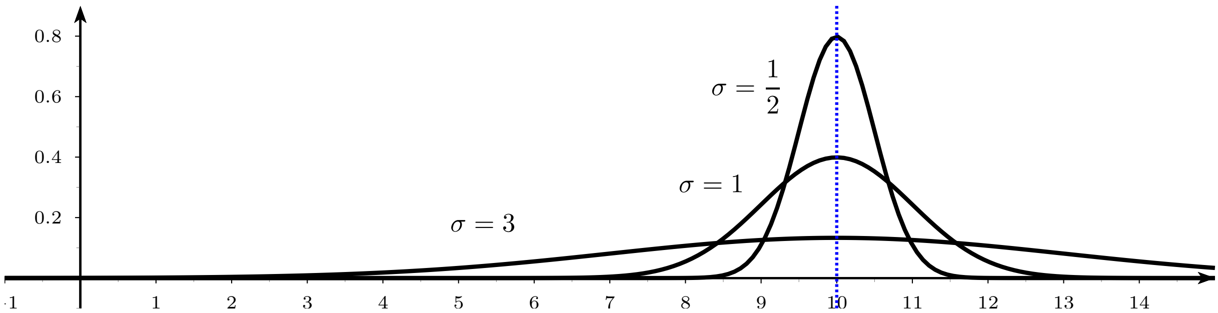


2 Loi normale générale

Définition:
Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ si la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ où σ est un réel strictement positif.

Propriété:
Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ alors $E(X)=\mu$; $V(X)=\sigma^2$ et $\sigma(X)=\sigma$.

Exemples:
La densité de probabilité de X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ est représenté par une « courbe en cloche »dont l'axe de symétrie a pour axe $x=\mu$ et qui est plus ou moins étirée selon les valeurs prises par σ. Pour $\mu=10$, on a tracé ci-dessous la densité de X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ pour trois valeurs différentes de σ :



Propriété:
Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ alors on a :

- $P\left(X \in [\mu-\sigma;\mu+\sigma]\right) \simeq 0,68$
- $P\left(X \in [\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]\right) \simeq 0,95$
- $P\left(X \in [\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]\right) \simeq 0,997$

3 Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème: (de Moivre-Laplace)
Soit, pour tout entier n, une variable aléatoire X_n qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X)} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, la variable centrée réduite associée à X_n. Alors pour tous nombres a et b tels que $a \leq b$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leq Z_n \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Remarque:
Ce théorème dit que pour de grandes valeurs de n, la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est très « proche »de la loi normale de même espérance np et de même variance $np(1-p)$.
Pour pouvoir approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np,np(1-p))$ avec une erreur minime, on fixe les conditions suivantes sur n et p :

$$n \geq 30 \quad ; \quad np \geq 5 \quad ; \quad n(1-p) \geq 5$$