

# Chapitre 27: Nombres complexes III

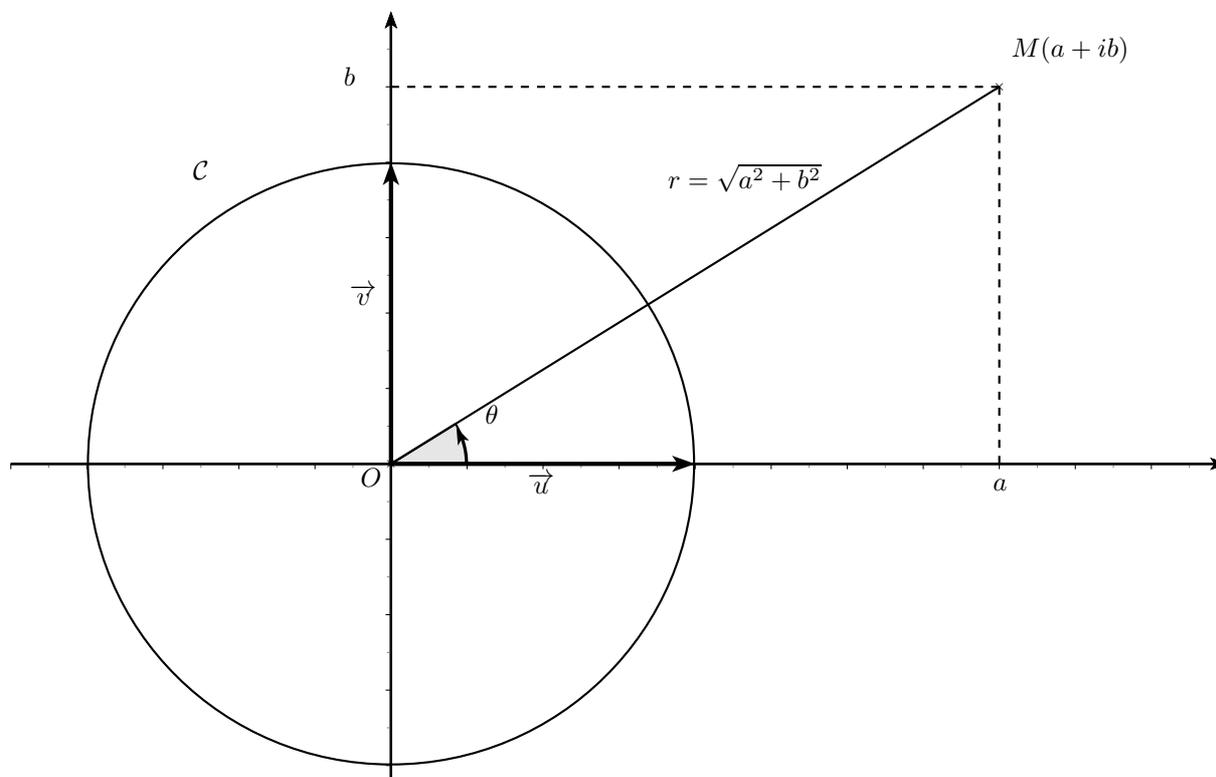
## 1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

### 1.1 Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère un nombre complexe non-nul  $z = a + ib$  et le point  $M$  d'affixe  $z$ . La demi-droite  $[OM)$  coupe le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$  en  $A$ . On note alors :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta \quad \text{et} \quad OM = r$$

Le point  $A$  a pour coordonnées cartésiennes  $(\cos(\theta); \sin(\theta))$  et  $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OA}$  avec  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Il en résulte que le point  $M$  a pour coordonnées cartésiennes  $(r\cos(\theta); r\sin(\theta))$



Ainsi, le nombre complexe  $z = a + ib$  s'écrit aussi :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

#### Définition:

Soit un nombre complexe non-nul  $z = a + ib$ .

- un argument de  $z$ , noté  $\arg(z)$ , est une des mesures, exprimée en radian, de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ .
- le module de  $z$ , noté  $|z|$ , est la longueur  $OM$ . On en déduit que  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
- $z$  s'écrit sous la forme  $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$  où  $\arg(z) \equiv \theta \pmod{2\pi}$ . Cette écriture est appelée forme **trigonométrique** du nombre complexe  $z$ .

#### Remarque:

L'argument de  $z$  est défini modulo  $2\pi$  ce qui implique la non-unicité de la forme trigonométrique.

Par exemple, pour  $z = -1 + i\sqrt{3}$ , on a :

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{donc} \quad \theta = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi} \quad \text{d'où} \quad z \text{ admet } 2 \left( \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \right) \text{ et}$$

$2 \left( \cos \left( -\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{4\pi}{3} \right) \right)$  pour formes trigonométriques.

Attention, on peut aussi montrer que  $z = -2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$  mais cette écriture n'est pas une forme trigonométrique puisque  $r \neq -2$ .

**Propriété:**

Deux nombres complexes non-nuls  $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$  et  $z' = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$  écrits sous forme trigonométrique sont égaux si et seulement si  $r = r'$  et  $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$

## 1.2 De la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement

Soit  $z$  un nombre complexe non-nul tel que  $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$  et  $|z| = r$  alors sa forme algébrique est  $z = a + ib$  avec  $a = r\cos(\theta)$  et  $b = r\sin(\theta)$ .

Soit  $z$  un nombre complexe non-nul tel que  $z = a + ib$  alors sa forme trigonométrique est  $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$  avec  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\theta$  défini par  $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  et  $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

## 1.3 Interprétation graphique

**Théorème:**

Si  $A$  et  $B$  sont deux points d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$  dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  alors  $AB = |z_B - z_A|$

**Démonstration:**

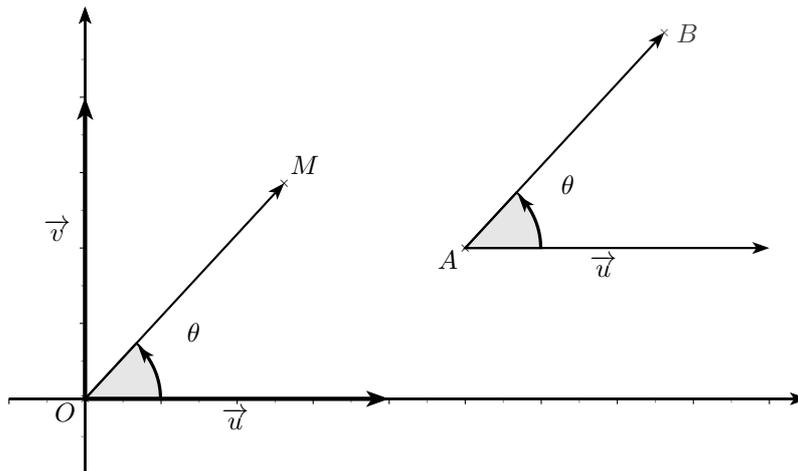
Il existe un unique point  $M$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{OM}$  a pour affixe  $z_M$  donc  $z_M = z_B - z_A$  soit  $|z_M| = |z_B - z_A|$ . Comme  $OM = |z_M|$  et  $AB = OM$  on en déduit que  $AB = |z_B - z_A|$

**Théorème:**

Si  $A$  et  $B$  sont deux points distincts d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$  dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  alors  $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$

**Démonstration:**

Il existe un unique point  $M$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$  donc  $z_M = z_B - z_A$  et  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ . Or  $\arg(z_M) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$  donc  $\arg(z_B - z_A) = \arg(z_M) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$



## 2 Notation exponentielle

### 2.1 Définition

**Définition:**

Tout nombre complexe de module 1 dont un argument est  $\theta$  est noté  $e^{i\theta}$  avec :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

**Exemple:**

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

et

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

**Théorème:**

Tout nombre complexe non-nul de module  $r$  et d'argument  $\theta$  s'écrit sous la forme suivante, dite forme **exponentielle** :

$$z = re^{i\theta}$$

**Démonstration:**

Tout nombre complexe non-nul admet une écriture sous forme trigonométrique de la forme  $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ . Or  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$  donc  $z$  s'écrit sous la forme  $z = re^{i\theta}$ .

**Propriété:**

Deux nombres complexes non-nuls  $z = re^{i\theta}$  et  $z' = r'e^{i\theta'}$  écrits sous forme exponentielle sont égaux si et seulement si  $r = r'$  et  $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$

**Propriété:**

Soit  $z = re^{i\theta}$  et  $z' = r'e^{i\theta'}$  deux nombres complexes non-nuls alors :

$$\bar{z} = re^{-i\theta} \quad ; \quad zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad ; \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \quad ; \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

### 2.2 Conséquences

Dans tout ce paragraphe  $z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes non-nuls.

**Théorème:**

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}.$$

**Théorème:**

$$|zz'| = |z||z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

**Conséquences :** Pour tout entier naturel non-nul  $n$ ;  $|z^n| = |z|^n$  et  $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \pmod{2\pi}$ .

**Théorème:**

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

**Conséquences :**  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$  et  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$