Chapitre 2: Limites de fonctions

1 Limites d'une fonction à l'infini

1.1 Limite finie

Dans cette partie, l désigne un nombre réel.

Définition:
On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
On dit que $f(x)$ tend vers l et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Remarque:
On définit de la même manière la notion de limite l en $-\infty$ que l'on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

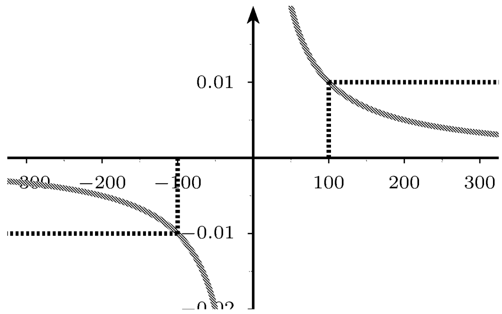
Exemple:
Soit f la fonction inverse définie pour tout réel x non-nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-0,01;0,01[$ pour $x > 100$, on dit que f a pour limite 0 en $+\infty$ et on note :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-0,01;0,01[$ pour $x < -100$, on dit que f a pour limite 0 en $-\infty$ et on note :*

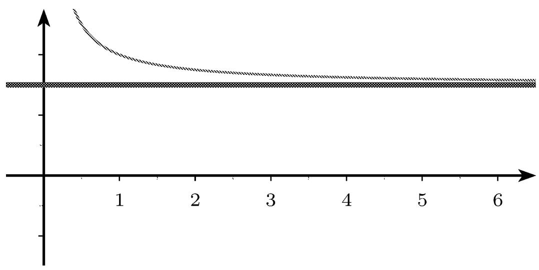
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



Propriété:
Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^\star$ ont pour limite 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a pour limite 0 en $+\infty$.

Propriété:
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan :
- *Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$.*

Exemple:
Pou $x \neq 0$, $\quad \dfrac{3x+1}{x} = 3 + \dfrac{1}{x} \quad$ *et* $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \dfrac{1}{x} = 3$
donc la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{x}$ en $+\infty$



1.2 Limite infinie

Définition:
On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Remarque:
On définit de la même manière la notion de limite $-\infty$ en $+\infty$, la notion de limite $+\infty$ en $-\infty$ et la notion de limite $-\infty$ en $-\infty$.

Exemple:
Soit f la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x)=x^2$.

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]100;+\infty[$ pour $x>10$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note :*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$$

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]100;+\infty[$ pour $x<-10$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note :*

$$\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$$

Propriété:
La fonction $x\longmapsto x^n$ où $n\in\mathbb{N}^\star$ a pour limite :

- *Si n est pair,* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$.
- *Si n est impair,* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$

2 Limite en un réel a

Définition:
On dit que la limite de f en a est l si, $f(x)$ peut-être rendu aussi proche de l que l'on veut, à condition que x soit suffisamment proche de a et on note :

$$\lim_{x\to a} f(x)=l$$

Propriété:

- *Si f admet une limite en a alors elle est unique.*
- *Si f est définie en a et admet une limite en a alors cette limite est égale à $f(a)$.*

Définition:
On dit que la limite de f en a est $+\infty$ si, lorsque x tend vers a, $f(x)$ est aussi grand que l'on veut et on note :

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

Exemple:
Soit f la fonction inverse définie pour tout réel non-nul x par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]100;+\infty[$ pour $0<x<0,01$, on dit que f a pour limite $+\infty$ à droite en 0 et on note :*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$$

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-\infty;-100[$ pour $-0,01<x<0$, on dit que f a pour limite $-\infty$ à gauche en 0 et on note :*

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$$

Définition:
Soit a un réel et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère. Lorsque la limite (à droite ou à gauche) de f en a est $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

Exemple:
Pour $x > 2$, $\lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0^+$ *et* $\lim\limits_{x \to 2^+} x + 3 = 5$ *donc* $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3+x}{x-2} = +\infty$
donc la droite d'équation $x = 2$ *est une asymptote verticale à la courbe* $\mathcal{C}$ *de la fonction* $x \longmapsto \dfrac{3+x}{x-2}$.