

## Limite d'une fonction à l'infini

### Définitions

On dit que  $f$  a pour limite  $l$  en  $+\infty$  si tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand. On dit que  $f(x)$  tend vers  $l$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  si tout intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand. On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ . On note :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

### Applications

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{4x+1}{x-1}$  et  $g(x) = xf(x)$

1. Déterminer les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
2. Déterminer à l'aide de votre calculatrice un réel  $M$  tel que pour tout  $x$  appartenant à  $]M; +\infty[$  on a :  $|f(x) - 4| < 10^{-3}$ .
3. Que peut-on en déduire pour  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ?
4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
5. Tracer à l'aide de votre calculatrice la courbe de la fonction  $f$ .
6. Quelle interprétation graphique peut-on faire des questions 2 et 4?
7. Déterminer les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
8. Déterminer à l'aide de votre calculatrice un réel  $N$  tel que pour tout  $x$  appartenant à  $]N; +\infty[$  on a :  $10^3 < g(x)$ .
9. Que peut-on en déduire pour  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ?
10. Déterminer à l'aide de votre calculatrice un réel  $P$  tel que pour tout  $x$  appartenant à  $] -\infty; P[$  on a :  $-10^3 > g(x)$ .
11. Que peut-on en déduire pour  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ?
12. Déterminer à l'aide de votre calculatrice les limites suivantes :
  - a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$
  - b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$
  - c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$
  - d.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$