Probabilités conditionnelles

Exercice 1:

On a réalisé une enquête auprès des employés d'une société d'assurances. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-contre :

	salaire $<$ 1300 euros	salaire $\geq$ 1300	total
femmes	450	150	600
hommes	500	300	800
total	950	450	1400

On désigne au hasard une personne parmi les 1400 employés de la société, ce qui signifie que tous les choix sont équiprobables. On appelle A l'événement « la personne gagne moins de 1300 euros par mois »et B l'événement « la personne est une femme ».

1. Calculer les probabilités des événements A, B et $A \cap B$.
2. On désigne maintenant au hasard une personne parmi les 600 femmes de la société. Quelle est la probabilité qu'elle gagne moins de 1300 euros par mois ?

   On dit que la probabilité que la personne choisie gagne moins de 1300 euros sachant que c'est une femme est de $\dfrac{3}{4}$.
   On note cette probabilité $P_B(A)$. On a donc $P_B(A) = \dfrac{3}{4}$.
3. En examinant la façon dont la probabilité précédente a été calculée, établir le lien entre $P_B(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$?
4. Quelle est la probabilité que la personne choisie soit une femme sachant que la personne choisie gagne moins de 1300 euros ?

Exercice 2:

On a un dé équilibré à 6 faces et deux urnes U_1 et U_2 constituées de la façon suivante : dans l'urne U_1, il y a 5 boules vertes et deux boules rouges ; dans l'urne U_2, il y a 10 boules vertes et 2 boules rouges.

On considère le jeu suivant : on lance le dé puis :

- si on fait un 5 ou un 6, on prend l'urne U_1 et on tire une boule au hasard.
- sinon on prend l'urne U_2 et on tire une boule au hasard.

On gagne à ce jeu si on tire une boule rouge. On appelle U_1 l'événement « la personne tire une boule dans l'urne U_1 », U_2 l'événement « la personne tire une boule dans l'urne U_2 »et R l'événement « la personne tire une boule rouge ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Exprimer par une phrase $P_{U_1}(R)$ puis donner sa valeur. Faire de même avec $P_{U_1}(\overline{R})$, $P_{U_2}(R)$ et $P_{U_2}(\overline{R})$.
3. Déterminer $P(U_1 \cap R)$.
4. Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?

Exercice 3:

Trois machines fabriquent des ampoules électriques dans les proportions suivantes : 20% sont fabriquées par la machine A, 50% par la machine B et 30% par la machine C.
Les probabilités que les ampoules fabriquées par les machines A, B et C soient bonnes sont respectivement 0,9 ; 0,95 et 0,8.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'une ampoule soit bonne.
3. Quelle est la probabilité qu'une ampoule soit fabriquée par la machine A sachant qu'elle est bonne.

Exercice 4:

En 2005, un laboratoire de recherche met au point un test de dépistage d'une maladie et fournit les renseignements suivants :

- La population testée comporte 40% d'animaux malades.
- Si un animal est malade, le test est positif dans 99% des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans $0,1\%$ des cas.

On note M l'événement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'événement contraire et T l'événement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.
2. En déduire $P(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à $0,999$. Ce test est-il fiable ?

Exercice 5:

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 10 cases chacune.
La roue A comporte 8 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 7 cases noires et 3 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Soient E et F les événements :
   - E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;
   - F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

   Montrer que $P(E) = 0{,}06$ et $P(F) = 0{,}3$.
3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
   X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel : le joueur mise 1 €).
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

Exercice 6:

Dans un lycée, on fait appel à un technicien pour l'entretien de la photocopieuse. On a pu constater que :

- le technicien vient la première semaine ;
- s'il intervient la semaine n, alors la probabilité qu'il intervienne la semaine $n+1$ est 0,75 ;
- s'il n'intervient pas la semaine n, la probabilité qu'il intervienne la semaine $n+1$ est 0,1.

On appelle A_n l'événement « le technicien intervient la semaine n »et p_n la probabilité de cet événement.

1. Quelle est la valeur de p_1 ?
2. Exprimer en fonction de p_n, $P\left(A_{n+1} \cap A_n\right)$ et $P\left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right)$.
3. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.
4. On pose $u_n = p_n - \dfrac{2}{7}$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.
5. Au bout de combien de semaines la probabilité que le technicien intervienne deviendra-t-elle inférieure à 0,5 ?
   Cette probabilité peut-elle devenir inférieure à 0,25 ?

Exercice 7:

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10% n'ont pas survécu, 75% deviennent rouges et les 15% restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5% n'ont pas survécu, 65% deviennent rouges et les 30% restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60% au premier éleveur, 40% au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.
   a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.
   b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.
   c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?
2. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, $0,25$ euro s'il est gris et perd $0,10$ euro s'il ne survit pas.
   Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.