Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites dont on connait la limite. La question légitime que l'on peut se poser est :

Les suites $(u_n + v_n)$, $(u_n \times v_n)$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ont-elles une limite et si oui quelle est-elle ?

I Limite d'une somme

1. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer à l'aide de votre calculatrice la limite des suites (u_n), (v_n) et (s_n) où

$$\boxed{s_n = u_n + v_n}$$

a. $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$;

b. $u_n = 2$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$;

c. $u_n = 3n + 5$ et $v_n = n^2 + 6$;

d. $u_n = -n + 3$ et $v_n = \dfrac{1}{2}n^2 + 2$.

2. Compléter le tableau suivant où l et l' sont deux nombres réels.

Si (u_n) a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors (s_n) a pour limite						

II Limite d'un produit

1. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer à l'aide de votre calculatrice la limite des suites (u_n), (v_n) et (p_n) où

$$\boxed{p_n = u_n \times v_n}$$

a. $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 7 + \dfrac{1}{n^2}$;

b. $u_n = n^2$ et $v_n = -2 + \dfrac{1}{n}$;

c. $u_n = 3n + 5$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$;

d. $u_n = -n^2 + 6n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

2. Compléter le tableau suivant où l et l' sont deux nombres réels.

Si (u_n) a pour limite	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(p_n \times v_n)$ a pour limite									

III Limite d'un quotient

1. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer à l'aide de votre calculatrice la limite des suites (u_n), (v_n) et (q_n) où $q_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

a. $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -2 + \dfrac{1}{n^2}$;

b. $u_n = 1 + n^2$ et $v_n = 5 + \dfrac{1}{n}$;

c. $u_n = 3n^2$ et $v_n = 1 + n$;

d. $u_n = 2n$ et $v_n = 7n^2$.

2. Compléter le tableau suivant où l et l' sont deux nombres réels.

Si (u_n) a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si (v_n) a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
alors (q_n) a pour limite							

3. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer à l'aide de votre calculatrice la limite des suites (u_n), (v_n) et (q_n) où

$$\boxed{q_n = \frac{u_n}{v_n}}$$

a. $u_n = -7 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$;

b. $u_n = -2 + \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = -\dfrac{1}{n}$;

c. $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{-3n+3}$;

d. $u_n = \dfrac{1}{2n+5}$ et $v_n = \dfrac{1}{2n^2+3n}$.

4. Compléter le tableau suivant où l est un nombre réel.

Si (u_n) a pour limite	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0
et si (v_n) a pour limite	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors (q_n) a pour limite					

IV Formes indéterminées

1. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = -2n^3 + 5n^2$.
   a. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .
   b. Montrer que pour tout entier n non-nul, $u_n = -2n^3\left(1 - \frac{5}{2n}\right)$
   c. Conclure.
   d. Déterminer la limite de la suite (w_n) la suite de terme général $w_n = 6n^4 - 7n^3$.

2. Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = \dfrac{2 + 5n + n^2}{1 + 2n^3}$.
   a. Conjecturer la limite de la suite (v_n) .
   b. Montrer que pour tout entier n non-nul, $v_n = \dfrac{1}{2n}\dfrac{\frac{2}{n^2} + \frac{5}{n} + 1}{\frac{1}{2n^3} + 1}$
   c. Conclure.
   d. Déterminer la limite de la suite (q_n) la suite de terme général $q_n = \dfrac{1 + n + 4n^2}{3n^2 + 6}$.