

Chapitre 4: Suites II

1 Limite d'une suite

1.1 Limite finie

Définition:

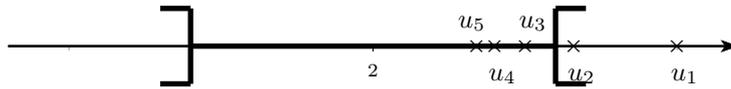
On dit que la suite (u_n) a pour limite le nombre réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Exemple:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

Pour $h = 0,4$, tous les termes de la suite à partir du rang $n_0 = 3$ sont compris dans l'intervalle $]2 - 0,4; 2 + 0,4[=]1,6; 2,4[$.



Dans cet exemple, quelque soit $h > 0$, tout intervalle de la forme $]2 - h; 2 + h[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 . On dit que la suite (u_n) converge vers 2.

Remarques:

- Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.
- On dit que la suite (u_n) est convergente de limite l ou qu'elle converge vers l .

1.2 Limite infinie et suite divergente

Définition:

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^2$.

Soit $A > 0$ un nombre réel positif, tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0 tel que $n_0 > \sqrt{A}$. En effet :

$$u_n > A \iff n^2 > A \iff n > \sqrt{A}$$

On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Définition:

Une suite (u_n) est dite divergente si elle n'est pas convergente vers un réel l .

Exemple:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = -1 \quad ; \quad u_2 = 1 \quad ; \quad u_3 = -1 \quad ; \quad \dots$$

Cette suite est alternée, elle ne converge vers aucun réel mais n'a pas non plus pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.

Remarque:

Il y a deux types de suites divergentes :

- celles qui n'ont aucune limite;
- celles qui ont pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.

2 Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites dont on connaît la limite. La question légitime que l'on peut se poser est :

Les suites $(u_n + v_n)$, $(u_n \times v_n)$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ ont-elles une limite et si oui quelle est-elle ?

2.1 Limite d'une somme

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux nombres réels.

<i>Si (u_n) a pour limite</i>	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
<i>et si (v_n) a pour limite</i>	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
<i>alors $(u_n + v_n)$ a pour limite</i>	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<i>FI</i>

FI signifie **forme indéterminée**, c'est à dire qu'on doit effectuer une étude particulière pour déterminer la limite de $(u_n + v_n)$.

2.2 Limite d'un produit

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux nombres réels non-nuls.

<i>Si (u_n) a pour limite</i>	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
<i>et si (v_n) a pour limite</i>	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
<i>alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite</i>	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<i>FI</i>

2.3 Limite d'un quotient

On distingue ici deux cas :

- le dénominateur a une limite non-nul :

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux nombres réels non-nuls..

<i>Si (u_n) a pour limite</i>	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
<i>et si (v_n) a pour limite</i>	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
<i>alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite</i>	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<i>FI</i>

- le dénominateur a une limite nul :

Théorème:

Dans le tableau suivant, l est un nombre réel non-nul.

<i>Si (u_n) a pour limite</i>	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0
<i>et si (v_n) a pour limite</i>	0^+	0^-	0^+	0^-	0
<i>alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite</i>	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<i>FI</i>

2.4 Formes indéterminées

D'après ce qui a été vu précédemment, on compte quatre formes indéterminés :

$$" \infty - \infty " \quad " 0 \times \infty " \quad " \frac{\infty}{\infty} " \quad " \frac{0}{0} "$$

Dans ce cas, il faut faire une étude particulière pour "lever l'indétermination".