Fonctions composées

Théorème:
a, b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$. u, v et f désignent des fonctions telles que $f = v \circ u$.

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to a} u(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y \to b} v(y) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = c$$

Exercice 1:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x-1}{x+2}}$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Déterminer les fonctions u et v tels que $f = u \circ v$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x)$ puis $\lim\limits_{X \to 4} u(X)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.
5. Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} f(x)$.

Exercice 2:

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 3x + 2$.
   a. Déterminer $h = f \circ g$
   b. Déterminer le domaine de définition de la fonction h.
   c. Étudier les limites de h aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. En déduire que $1 + f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{1+x}$.
   a. Déterminer $h = g \circ f$
   b. Déterminer le domaine de définition de la fonction h.
   c. Étudier les limites de h aux bornes de son domaine de définition.