

## Théorèmes de comparaisons

**Exercice 1:**

Démontrer le théorème ci-dessous :

Soit  $f$ ,  $u$  et  $v$  trois fonctions définies sur  $[M; +\infty[$ .

Si  $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

**Exercice 2:**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{x + 4\cos(x)}{x}$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,

$$1 - \frac{4}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{4}{x}$$

2. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Exercice 3:**

Démontrer le théorème ci-dessous :

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I = [M; +\infty[$ .

Si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

**Exercice 4:**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - 3\sin(x)$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq x - 3$ .

2. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Exercice 5:**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  tel que pour tout réel  $x$ ,

$$\frac{4x^2}{1+x^2} \leq f(x) \leq 4 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$