Théorèmes de comparaisons et limites de suites usuelles

Exercice 1:
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait : $u_n \leq v_n$.
Démontrer que si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Exercice 2:
Déterminer dans chaque cas, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = n^2 + (-1)^n n$
2. $u_n = \dfrac{2n+3}{cos(n)+n}$
3. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$
4. $u_n = 3 + \dfrac{sin(1+n^2)}{n}$ (pour $n > 0$)

Exercice 3:

1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que pour tout entier n, $(1+a)^n \geq 1 + na$
2. En posant $q = 1 + a$, en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ pour $q > 1$.
3. Soit q un nombre réel tel que $0 < q < 1$. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Exercice 4:
Soit (u_n) une suite géométrique (v_n) de raison $\dfrac{2}{3}$ et de terme premier terme $u_0 = 4$.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Conclure
3. Déterminer S_n en fonction de n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. Conclure
4. Réaliser la même étude pour une suite arithmétique de raison 2 et de terme premier terme $u_0 = \dfrac{1}{3}$

Exercice 5:
Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Prouver que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$ est géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Conclure
4. Déterminer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et conclure

Exercice 6:
Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4 - u_n} \end{cases}$$

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Prouver que la suite (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{3u_n + 2}{u_n}$ est arithmétique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Conclure.

Exercice 7:
Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$$

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Prouver que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n^2$ est arithmétique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Conclure