

Chapitre 8: Continuité

1 Continuité d'une fonction

Définition:

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel appartenant à I . On dit que :

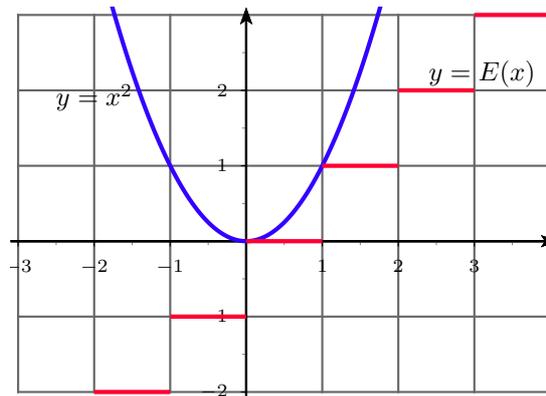
- f est continue en a si f a une limite finie en a telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$;
- f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout nombre de I .

Remarque:

Une fonction définie sur un intervalle I est continue sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille).

Exemple:

La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur \mathbb{R} alors que la fonction $x \mapsto E(x)$ n'est pas continue sur \mathbb{R} :



Théorème:

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) a une limite finie l et si f est continue en l , alors $l = f(l)$.

Démonstration:

(u_n) converge vers l donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

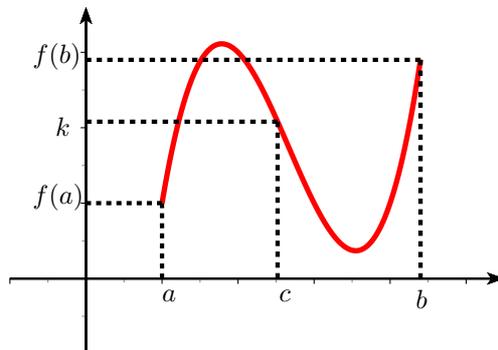
Posons $x = u_n$, comme f est continue en l donc $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = f(l)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(l)$.

Les suites (u_n) et (u_{n+1}) ont la même limite donc $l = f(l)$.

2 Théorème des valeurs intermédiaires

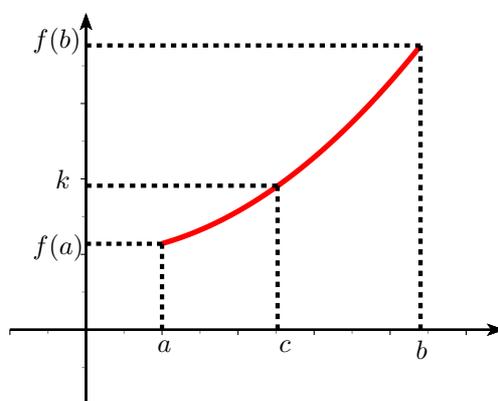
Théorème: (des valeurs intermédiaires)

f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Corollaire:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a; b]$.



Démonstration:

L'existence de la solution est assurée par le théorème des valeurs intermédiaires. Supposons qu'on ait deux solutions distinctes x_0 et x_1 .

D'une part $f(x_0) = k = f(x_1)$ et d'autre part comme $x_0 \neq x_1$ (par exemple $x_0 < x_1$) alors $f(x_0) \neq f(x_1)$ car f est strictement monotone.

L'hypothèse de départ est fautive, on ne peut pas avoir deux solutions distinctes et il n'existe donc qu'une unique solution à l'équation.

Remarque:

Il existe des extensions à ce corollaire dans le cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts à l'aide des limites. Voir les exemples en exercice.