DEVOIR BILAN		
Enseignants : SECHER P. GREAU D.	**Nom :** **Prénom :**	**Note :**
Date : 22/05/2015	**Classe :**	**Durée :** 3 heures

Exercice 1: 5 points

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2000 pour la vente en gros.
On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,003$.
On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.
On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.
2. Déterminer l'espérance et la variance de la loi X.
3. Déterminer $P(X = 8)$. Interpréter ce résultat.
4. Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci. Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.
On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(110\ ;\ \sigma^2\right)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ.
Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104\ ;\ 116]$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'événement « la glace est commercialisable » soit égale à $0,98$.

Exercice 2: 5 points

Cinq affirmations sont proposées. Indiquer pour chacune si elle est vraie ou fausse, ***en justifiant*** *la réponse.*

Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions **1.** et **2.**, le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Affirmation 1 :
Le point d'affixe $(-1+\mathrm{i})^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.

Affirmation 2 :
Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \overline{z} + 2 - 4\mathrm{i} = 0$ admet une solution unique.

Affirmation 3 :
$\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^7}\right) + \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^9\right)}{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln 2 + \ln 3}}{\mathrm{e}^{\ln 3 - \ln 4}}$

Affirmation 4 :
$\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(\frac{3}{5}\right)$

Affirmation 5 :
L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3: 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On donne les points A$(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$, B$(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, C$(-5\ ;\ 5\ ;\ 0)$ et D$(11\ ;\ 1\ ;\ -2)$.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
Le point K est défini par $\overrightarrow{\mathrm{BK}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

1. a. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
   b. Démontrer que les points I, J et K définissent un plan.
   c. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(3\ ;\ 1\ ;\ 4)$ est un vecteur normal au plan (IJK). En déduire une équation cartésienne de ce plan.
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + y + 4z - 8 = 0$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BD).
   b. Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (BD) sont sécants et donner les coordonnées de L, point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (BD).
   c. Le point L est-il le symétrique du point D par rapport au point B ?

Exercice 4: 5 points

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

   Étudier le sens de variation de la fonction g.
   b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704]$.
   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. **Étude de la fonction f**
   a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel
   $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.
   e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.