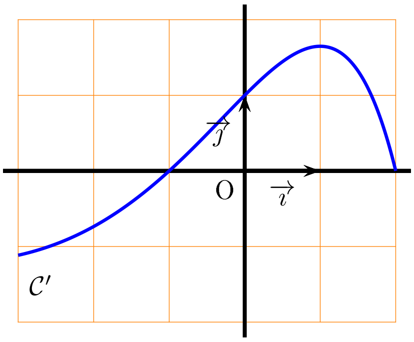
Devoir maison 1

Exercice 1: 6 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$. On dispose de plus des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;0)$.

Exercice 2: 6 points

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.
   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.
   c. Déterminer la valeur exacte de $\displaystyle\sum_{i=0}^{10} u_i$

Exercice 3: 8 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 4}$.

1. Déterminer les antécédents de 6 par f.
2. Étudier le signe de f.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) > 4$.
4. Déterminer les variations de la fonction f.
5. Donner par observation graphique les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.