

Devoir bilan 4 - Spécialité

La calculatrice est interdite !

Enseignant : GREAU D. Date : 02/06/2015	Nom : Prénom : Classe :	Note :
--	--	---------------

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n , la probabilité de fumer le n -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer. On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1 .
2. On utilise un tableau pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n) . Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			
5	4	0,75	0,25	

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n .

- a. Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?
- b. Compléter le tableau ci-dessus.
3. Soit X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.
 - a. Déterminer la matrice carrée M tel que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = M \times X_n$.
 - b. En déduire, pour tout entier naturel n , X_n en fonction de M et de X_0 .
4. Dans cette question, on va déterminer M^n pour tout entier naturel n .
 Pour cela, on définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.
 - a. Démontrer que $M = A + 0,5B$.
 - b. Déterminer A^2 , B^2 , $A \times B$ et $B \times A$.
 - c. Que peut-on en déduire pour A^n et B^n pour tout entier naturel non-nul n ?
 - d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $M^n = A + 0,5^n B$.

Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,8 + 0,2 \times 0,5^n & 0,8 - 0,8 \times 0,5^n \\ 0,2 - 0,2 \times 0,5^n & 0,2 + 0,8 \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n , $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.
6. A long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?

Pour information :

$$0,8 \times 0,8 = 0,64 \quad ; \quad 0,8 \times 0,2 = 0,16 \quad ; \quad 0,2 \times 0,2 = 0,04$$