Devoir maison 4 : L'algorithme de Smyrne

Soit (x_n) et (y_n) deux suites définies conjointement par $x_0 = y_0 = 1$ et pour tout entier n naturel non-nul :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n + y_n \\ y_{n+1} & = & 2x_n + y_n \end{array} \right.$$

1. Donner une rapide biographie de Théon de Smyrne (Deux lignes).
2. Donner dans un tableau les dix premiers termes de chaque suite ainsi que le quotient $z_n = \dfrac{y_n}{x_n}$
3. Quelles conjectures peut-on emmètre sur les suites (x_n), (y_n) et (z_n) ?
4. Écrire un algorithme qui permet de trouver la valeur de (z_n) pour une valeur de n donnée puis entrer et tester cet algorithme dans le logiciel Algobox.
5. Identifier la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ avec $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
6. Justifier que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
7. Montrer (sans calculatrice) que $A = PDQ$ et $PQ = QP = I_2$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \quad Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

8. En déduire que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = PD^nQ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
9. Donner l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.
10. Déterminer la limite des suites (x_n), (y_n) et (z_n).
11. Conjecturer la limite de la suite (z_n) si (x_n) et (y_n) sont définies conjointement par $x_0 = y_0 = 1$ et pour tout entier n naturel non-nul :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n + y_n \\ y_{n+1} & = & ax_n + y_n \end{array} \right. \quad \texttt{avec} \quad a > 0$$