

Devoir maison 5

Exercice 1:

7 points

Une équation polynomiale (E) à coefficients entiers est une équation de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ et a_0 sont des entiers avec $a_n \neq 0$.

1. Soit (E_1) l'équation $x^7 - 6x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 31x + 2 = 0$.
 - a. Montrer que si (E_1) a une solution entière m , alors m divise 2.
 - b. En déduire les valeurs possibles de m .
 - c. Déterminer l'unique solution entière de (E_1) .
2. Soit (E) l'équation initiale.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , si p et q sont deux entiers premiers entre-eux, alors p et q^n sont aussi premiers entre-eux.
 - b. On suppose que l'équation (E) admet une solution de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont premiers entre-eux (pour que cette fraction soit irréductible). Montrer que $\frac{p}{q}$ est solution de (E) si et seulement si $a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + a_{n-2} q^2 p^{n-2} + \dots + a_2 q^{n-2} p^2 + a_1 q^{n-1} p + a_0 q^n = 0$.
 - c. Montrer que p divise a_0 et q divise a_n .
 - d. Énoncer un critère permettant de reconnaître les fractions irréductibles qui peuvent être solutions d'une équation polynomiale à coefficients constants.
3. Soit (E_2) l'équation $15x^3 - 43x^2 - 7x + 3 = 0$.
 - a. Montrer que le critère énoncé précédemment montre qu'au plus 12 fractions irréductibles peuvent être solutions de l'équation (E_2) .
 - b. Déterminer à l'aide de votre calculatrice les trois solutions de (E_2) puis déterminer la forme factorisée de la fonction polynôme $f : x \mapsto 15x^3 - 43x^2 - 7x + 3$.
 - c. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2:

3 points

1. Résoudre l'équation $15q - 28q' = 6$ où q et q' sont des nombres entiers.
2. En déduire les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{15} \\ x \equiv 8 \pmod{28} \end{cases}$$
3. Un phare breton émet un signal jaune toutes les 15 minutes et un signal rouge toutes les 28 minutes. On aperçoit le signal jaune à 0h02 et le signal rouge à 0h08.
 - a. A quelle heure verra-t-on pour la première fois les deux signaux émis en même temps ?
 - b. Combien de fois chaque signal aura-t'il été aperçu avant cette heure ?
 - c. A quelle heure verra-t-on pour la deuxième fois les deux signaux émis en même temps ?