Théorèmes de Fermat

I Petit théorème de Fermat

Théorème:
Soit n un entier. Si p est un nombre premier ne divisant pas n, alors $n^{p-1} \equiv 1\,(p)$

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 342^{10} par 11.
2. Démontrer que $123568^6 - 1$ est divisible par 7.
3. Quels sont les entiers n tels que $n^{12} \equiv 1\,(13)$?
4. Quels sont les entiers n tels que $n^{60} \equiv 1\,(77)$

II Corollaire du petit théorème de Fermat

1. A l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau de congruence suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
$n^7\,(7)$							

2. Démontrer le corollaire du petit théorème de Fermat :

   Théorème:
   Soit n un entier et p est un nombre premier, alors $n^p \equiv n\,(p)$

3. Démontrer que $n^5 - n$ est divisible par 5 pour tout entier n.
4. Démontrer que $n^{11} - n$ est divisible par 33 pour tout entier n.

III Grand théorème de Fermat

Théorème:
Soit n un entier supérieur ou égale à 3. Il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y et z tels que :

$$x^n + y^n = z^n$$

1. Démontrer à l'aide d'exemples pourquoi ce théorème est faux pour $n \leq 2$.
2. Déterminer l'historique de la démonstration de ce théorème.