PGCD et PPCM

1 Le plus grand diviseur commun

Définition:
Soit a et b des entiers naturels non-nuls. Le plus grand élément de $D(a) \cap D(b)$, ensemble des diviseurs positifs communs de a et de b, est le plus grand commun diviseur de a et b, ou encore $PGCD$ de a et b.

1. Soit a et b deux entiers. Déterminer la plus petite valeur possible que peut prendre $PGCD(a;b)$.
2. Déterminer la liste des diviseurs de 1386 et 1815.
3. En déduire $d = PGCD(1386;1815)$.
4. Déterminer la décomposition en produit de facteur premier de 1386, 1815 et d.
5. Quel lien peut-on établir entre ces trois décompositions ?
6. A l'aide de cette propriété, déterminer $PGCD(1040;19800)$ et $PGCD(9405;126063)$.
7. Soit a et b deux entiers non-nuls, démontrer que $D(a) \cap D(b) = D(b) \cap D(r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b. Conclure.
8. Déterminer $PGCD(1386;1815)$ d'une autre manière en justifiant votre raisonnement.
9. Déterminer $PGCD(1040;19800)$ et $PGCD(195;187)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

2 Le plus petit multiple commun

Définition:
Le plus petit commun multiple des entiers naturels non-nuls a et b est le plus petit élément de l'ensemble des multiples communs strictement positifs de a et de b. On l'appelle aussi $PPCM$ de a et b.

1. Soit a et b deux entiers. Déterminer la plus petite valeur possible que peut prendre $PPCM(a;b)$.
2. Déterminer $PPCM(1386;1815)$ à l'aide de la décomposition en produit de facteur premier de 1386, 1815.
3. Déterminer $PPCM(1040;19800)$ et $PPCM(9405;126063)$.
4. Quel lien peut-on établir entre a, b, $PGCD(a;b)$ et $PPCM(a;b)$.
5. Déterminer $PGCD(14500;6272)$ d'une autre manière en justifiant votre raisonnement.

3 Programmation

1. Déterminer un programme, utilisant l'algorithme d'Euclide, qui renvoie le $PGCD$ de deux nombres donnés.
2. En déduire un programme qui renvoie le $PGCD$ et le $PPCM$ de deux nombres donnés.