

Théorème de Bézout

1 Nombres premiers entre-eux

Définition:

Deux entiers sont premiers entre-eux lorsque leur $PGCD$ est égal à 1.

1. 195 et 462 sont-ils premiers entre-eux ?
2. 9570 et 10829 sont-ils premiers entre-eux ?
3. Déterminer trois couples $(a; b)$ de nombres premiers entre-eux avec a et b non-premiers et différents de 1.
4. Démontrer que deux nombres premiers sont premiers entre-eux.
5. Soit a et b deux entiers-naturels non nuls et $d = PGCD(a; b)$. Démontrer qu'il existe deux entiers a' et b' premiers entre-eux tels que $a = da'$ et $b = db'$.

2 Théorème de Bézout

Théorème: (Théorème de Bézout)

Deux entiers a et b sont premiers entre-eux, si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$

1. 21 et 110 sont-ils premiers entre-eux ?
2. Déterminer des coefficients de l'identité de Bezout de 21 et 110 à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
3. Montrer que 377 et 30 sont premiers entre-eux puis déterminer des entiers u et v tels que $377u + 30v = 1$.
4. Déterminer deux autres couples $(u; v)$ tels que $377u + 30v = 1$.
5. Montrer que deux entiers consécutifs sont premiers entre-eux.
6. Démontrer que si d est le $PGCD$ de deux entiers a et b alors il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$.
7. Déterminer des entiers u et v tels que $88u + 770v = PGCD(88; 770)$.