## Théorème de Gauss

## 1 Théorème de Gauss

## Théorème: (Théorème de Gauss)

Soit a, b et c trois entiers. Si a divise le produit bc et si a est premier avec b alors a divise c.

- 1. A l'aide du théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.
- 2. Trouver dans chaque cas un exemple qui illustre les propriétés suivantes issues du théorème de Gauss puis démontrer ces propriétés.
  - a. Si un entier est divisible par des entiers a et b premiers entre-eux alors il est divisible par le produit ab.
  - b. Si un entier premier divise un produit de facteurs ab alors il divise au moins l'un des facteurs a ou b.
  - c. Si un entier premier p divise un produit de facteurs premiers alors il est égal à l'un d'eux.
  - d. Un entier p est premier avec les entiers a et b si et seulement si p est premier avec le produit ab.

## 2 Applications

- 1. Déterminer les nombres x et y tels que 13x = 21y.
- 2. Déterminer les nombres x et y tels que 8x + 9y = 1.
- 3. Déterminer les nombres x et y tels que 8x + 9y = 2.
- 4. Démontrer que  $n^3 n$  est divisible par 6 pour tout entier n.
- 5. Démontrer que  $n^4 n^2$  est divisible par 12 pour tout entier n.