Diviseurs d'un entier ALGO

Partie A

Un triangle rectangle a des côtés de longueurs entières. L'un des côtés de l'angle droit a pour longueur 6. On aimerait déterminer les longueurs des deux autres côtés.

1. En notant x et y les longueurs cherchées (avec $x > y$), vérifier que l'on doit avoir $(x-y)(x+y)=36$.

2. Quels sont les diviseurs positifs de 36 ?

3. Quels sont les couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ vérifiant $ab=36$?

4. En déduire les longueurs cherchées.

Partie B

Ayant à traiter un grand nombre de tels triangles, on cherche à systématiser la recherche des couples $(a\,;b)$ tels que $ab=n$ où n est un entier naturel.

On propose l'algorithme suivant :

```
Entrée : n entier, n > 2
Traitement :
Pour j de 1 à E(√n)
    Si j est un diviseur de n alors
        afficher j et n/j
    Fin Si
Fin Pour
```

La fonction E utilisée ici est la fonction partie entière :

$E(2{,}1)=E(2{,}9)=E(2)=2$

$E(\pi)=E(3)=E(3{,}201)=3$

Et plus généralement, $E(x)=n$ pour tout réel $x\in[n\,;n+1[$, n étant un entier naturel.

1. Quels seront les affichages obtenus lorsqu'on entre $n=36$? $n=38$?

2. Tester cet algorithme avec la calculatrice. Le programme correspondant est donné ci-dessous :

Casio

```
======DIVISEUR======
"N":?→N↵
For 1→J To Intg (√N)↵
If N÷J=Intg (N÷J)↵
Then J◢
N÷J◢
IfEnd↵
Next↵
"FIN"
```

Texas

```
PROGRAM:DIVISEUR
:Prompt N
:For(J,1,partEnt
(√(N))
:If N/J=partEnt(
N/J)
:Then
:Disp J
:Pause N/J
:End
:End
```

3. Expliquer pourquoi l'instruction $\frac{N}{j}=E\left(\frac{N}{j}\right)$ traduit la condition « j est un diviseur de N ».

4. Soit a et b deux entiers naturels tels que $ab=n$ avec $a\leqslant b$. Montrer que l'on a $a\leqslant\sqrt{n}\leqslant b$ et en déduire que le programme proposé affiche bien tous les couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ tels que $ab=n$.

5. Justifier, avec ce qui précède, qu'un entier n a un nombre fini de diviseurs entiers naturels.

2 Dresser la liste des diviseurs positifs des entiers 36, 49 et 126 sans outil de calcul.

3 Dresser la liste des diviseurs dans $\mathbb{Z}$ des entiers 36, 49 et 126.

4 **Avec un tableur** TICE

Dresser la liste des diviseurs positifs des entiers 36, 49 et 126 à l'aide d'un tableur. Pour cela, en colonne **A**, entrer les entiers 1, 2, 3, …, n et utiliser en colonne **B** la fonction **SI()** du tableur ainsi que la fonction **MOD()**.

5 Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Regrouper les phrases ayant la même signification :

- **A** a est un diviseur de b.
- **B** a est divisible par b.
- **C** a est un multiple de b.
- **D** a divise b.
- **E** Le reste de la division de a par b est zéro.
- **F** Le quotient $\frac{a}{b}$ est un entier.
- **G** La partie entière de $\frac{a}{b}$ est égale à $\frac{a}{b}$.

6 Combien d'entiers compris entre -50 et 75 le nombre 17 divise-t-il ?

7 Est-il vrai que le produit de deux entiers naturels consécutifs est toujours divisible par 2 ?

8 Est-il vrai que la somme de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 3 ?

9 Montrer que la somme de deux entiers impairs est un entier pair.

10 Existe-t-il un entier m qui soit multiple de 14 et diviseur de 100 ?

11 Montrer que si n est un entier pair, alors l'entier $A=n(n^2+20)$ est multiple de 8.

19 Effectuer la division euclidienne de a par b dans les cas ci-dessous. On rappelle que le quotient d'une division euclidienne peut être obtenu avec la fonction partie entière de la calculatrice.

1. $a=2\,013\,;\ b=7$.

2. $a=-2\,013\,;\ b=7$.

3. $a=7\,;\ b=2\,013$.

4. $a=-7\,;\ b=2\,013$.

48 Déterminer les entiers puis les entiers naturels n tels que 7 divise $n+54$.

→ Pour vous aider Savoir-faire 1, p. 11

49 Déterminer les entiers n tels que n divise $n+12$.

→ Pour vous aider Savoir-faire 1, p. 11

50 Déterminer les entiers n tels que $3n+7$ divise 6.

→ Pour vous aider Savoir-faire 1, p. 11

51 Déterminer tous les entiers n tels que $3n+4$ divise $n+7$.

→ Pour vous aider Savoir-faire 1, p. 11

52 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $2n+9$ divise $n+11$.

53 Soit n un entier et a un entier divisant $n-1$ et n^2+n+3. Établir que a est un diviseur de 5.

69 Le reste de la division euclidienne de 1 789 par l'entier naturel b est 497.

Déterminer les valeurs possibles de b et du quotient.

→ Pour vous aider Savoir-faire 3, p. 13

70 Le reste de la division euclidienne de 225 par un entier naturel b est 4. Déterminer les valeurs possibles de b.

→ Pour vous aider Savoir-faire 3, p. 13

71 Par quels entiers naturels faut-il diviser 12 pour que le quotient de la division euclidienne soit égal au reste ?

72 Soit n un entier.

Établir que n^2 s'écrit sous la forme $4k$ ou sous la forme $4k+1$.

→ Pour vous aider Savoir-faire 4, p. 13

73 Soit n un entier, on pose :

$$f(n)=(n-11)(n-22)(n-33)\,(n-44)\,(n-55).$$

Établir que $f(n)$ est multiple de 5 pour tout entier n.

→ Pour vous aider Savoir-faire 4, p. 13

Problème 2 Le code-barres

Objectif
Travailler la notion de diviseur et la notion de reste d'une division euclidienne.

Cours 1 et 2
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$
Division euclidienne

Le code-barres de nombreux produits est constitué de treize chiffres. Les douze premiers chiffres permettent d'identifier le produit. Le treizième chiffre est une clé de contrôle qui permet de détecter une éventuelle erreur dans les 12 chiffres d'identification.
Si l'on note $a_1, a_2, \dots, a_{13}$ les 13 chiffres d'un code-barres, la clé a_{13} est déterminée de façon à ce que l'entier $S = 3 \times (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13}$ soit un multiple de 10.

1. Vérifier que le code 4971850187820 satisfait la contrainte définissant un code-barres valide.

2. Déterminer la clé de contrôle du code d'identification suivant :
978204732850.

3. Dans la suite, on notera r le reste de la division de $S - c$ par 10 où c est la clé. Vérifier que $c = 10 - r$ dans le cas de la question **2**.

4. a. Quelles sont les valeurs possibles d'un reste dans une division euclidienne par 10 ?
b. Pour l'une de ces valeurs, la clé ne peut pas être égale à $10 - r$. Laquelle ?
Quelle est la clé dans ce cas ?
c. Démontrer que lorsque le reste r est non nul, l'entier $10 - r$ est une clé qui convient.

5. Démontrer que la clé correspondant à une séquence $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ est unique, ce qui signifi que l'on a l'implication suivante : « Si c et c' sont deux entiers satisfaisant la définition de la clé pou la séquence d'identification $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ alors $c = c'$ ».

6. Peut-il correspondre plusieurs séquences $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ d'identification à une clé c donnée ?

7. On suppose qu'on a fait une erreur sur le chiffre a_2 en entrant un code-barres dans une base d données (et aucune autre erreur). Notons b_2 le chiffre qui s'est substitué à a_2 et :
$$S' = 3 \times (b_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13}.$$
a. Donner un encadrement de la différence $a_2 - b_2$.
b. Calculer et encadrer la différence $S - S'$ et montrer que cette différence ne peut pas être un multipl de 10.
c. En déduire que le code obtenu ne satisfait pas les contraintes définissant un code-barres.

8. Le raisonnement précédent montre que la présence d'une erreur unique, sur un chiffre de ran pair, peut être détectée. Montrer de même que la présence d'une erreur unique, faite sur un chiffr de rang impair, peut être détectée.

9. Donner un exemple montrant que lorsque deux erreurs sont commises, elles ne seront pas néces

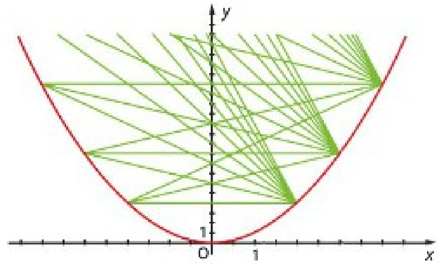
Problème 4 Le crible de Matiassevitch

Objectif
Découvrir les notions de nombre premier et nombre composé.

Cours 3
Les nombres premiers

Un nombre premier est un entier p supérieur ou égal à 2 qui n'admet pas d'autre diviseur que 1 et p.
Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Soit i et j deux entiers naturels, $P_i(i\,;i^2)$ le point d'abscisse i de la parabole $\mathcal{P}$ et $N_j(-j\,;j^2)$ le point d'abscisse $-j$ de cette parabole.

1. Dans cette question, $n = 20$.
On a tracé sur la figure ci-dessous les segments $[P_iN_j]$ pour $2 \leqslant i \leqslant E(\sqrt{n})$ et $2 \leqslant j \leqslant E\left(\frac{n}{2}\right)$.



a. Que peut-on penser des ordonnées des points de l'axe $(O\,;\vec{v})$ qui appartiennent à l'un des segments verts ? qui n'appartiennent à aucun des segments verts ?
b. Démontrer que le coefficient directeur de la droite (P_iN_j) est $i - j$.
c. Démontrer que l'ordonnée à l'origine de la droite (P_iN_j) est $i \times j$.

2. Dans un dictionnaire, on trouve la définition suivante pour le mot *cribler* : « passer au crible : tamiser, trier, calibrer ». Expliquer pourquoi on parle de crible des nombres premiers pour la figure obtenue lorsqu'on trace tous les segments $[P_iN_j]$ pour i et j supérieurs ou égaux à 2.

3. Dans la construction qui suit, on choisit $n = 100$.
On trace la parabole d'équation $y = x^2$.
On construit les segments $[P_iN_j]$ pour $2 \leqslant i \leqslant E(\sqrt{n})$ et $2 \leqslant j \leqslant E\left(\frac{n}{2}\right)$
Expliquer pourquoi la figure constitue un crible des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Point Histoire
Youri Matiassevitch (né en 1947) est un mathématicien russe. Il a notamment apporté une réponse au « dixième problème de Hilbert ».

Problème 5 Test de primalité et infinité des nombres premiers ALGO

Objectif
Découvrir un test de primalité et l'infinité des nombres premiers.

Cours 3
Les nombres premiers

Entrer les programmes suivants dans la calculatrice :

Algorithme

```
Entrée : N entier naturel
Traitement :
Pour J de 2 à E(√N)
    Si J divise N
        alors afficher J
        et stopper
        le programme
    Fin Si
Fin Pour
Sortie : Afficher N
```

Casio

```
======PFD        ======
"N":?→N↵
For  2→J To Intg(√N)↵
N÷J→Q↵
If Q=Intg(Q)↵
Then J↵
Stop↵
IfEnd↵
Next↵
N
```

Texas

```
PROGRAM:PPD
:Prompt N
:For(J,2,partEnt
(√(N)))
:N/J→Q
:If Q=partEnt(Q)
:Then
:Disp J
:Stop
:End
:End
:Disp N
```

1. a. Quelle est la sortie lorsqu'on entre $N = 11$?
b. Quelle est la sortie lorsqu'on entre $N = 12$?

2. a. Justifier qu'un entier sera toujours affiché quelle que soit l'entrée N.
b. Établir que l'entier affiché par le programme est toujours un nombre premier, diviseur de N.
c. En déduire que tout entier N non premier admet au moins un diviseur premier au plus égal à sa racine carrée.

3. Expliquer comment se servir de ce programme comme test de primalité (c'est-à-dire comme test permettant de reconnaître si un nombre est premier ou non).

4. On se demande s'il est possible qu'un tel algorithme n'affiche en sortie qu'un nombre fini de valeurs différentes. Pour cela, on note $p_1, p_2, \dots, p_k$ les entiers que l'on a déjà obtenus à l'affichage après un certain nombre d'essais et on cherche à établir que l'on peut obtenir d'autres entiers à l'affichage.
On exécute l'algorithme avec l'entrée $N = p_1 p_2 \dots p_k + 1$.
a. Quel est le reste de la division euclidienne de N par p_1 ?
b. Établir que l'algorithme affichera une valeur non encore obtenue avec cette entrée N.
c. Expliquer pourquoi on a ainsi établi qu'il existe une infinité de nombres premiers.