# Thème 2: Matrices

## 1 Généralités sur les matrices

**Définition:**
*Une matrice $A$ de dimension $(n;p)$ est un tableau de nombres à $n$ lignes et $p$ colonnes. Les nombres de ce tableau sont appelés les coefficients de la matrice. Ainsi, le coefficient se trouvant à l'intersection de la ligne $i$ et de la colonne $j$ est noté $a_{i,j}$. Lorsque $n = p$, on dit que la matrice est carrée d'ordre $n$.*

**Exemple:**
*La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ *est de dimension* $(2;3)$. $6$ *est le coefficient* $a_{2,1}$. *La matrice* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *est d'ordre* $3$.

**Définition:**
*Deux matrices $A$ et $B$ sont égales si elles ont la même dimension $(n;p)$ et si $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.*

**Définition:**
*Soient $A$ et $B$ deux matrices de même dimension $(n;p)$ et $k$ un nombre réel alors :*
- *la matrice $C = A + B$ a pour coefficient $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.*
- *la matrice $D = kA$ a pour coefficient $d_{i,j} = k \times a_{i,j}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.*

**Exemple:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -12 & 13 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 11 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \texttt{et} \quad 2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & 0 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

## 2 Multiplication de deux matrices

**Définition:**
*Soit* $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ *une matrice ligne à $n$ colonnes et* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ *une matrice colonne à $n$ lignes. Le produit $A \times B$ est une matrice de dimension $(1;1)$ et son unique élément est égal à $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$*

**Exemple:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 8 + 6 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$$

**Définition:**
*Soient $A$ une matrice de dimension $(n;p)$ et $B$ une matrice de dimension $(m;n)$. Si $L_1$, $L_2$, $\dots$, $L_n$ sont les $n$ lignes de la matrice $A$ et $C_1$, $C_2$, $\dots$, $C_n$ sont les $n$ colonnes de la matrice $B$ alors la matrice $A \times B$, notée $AB$, est une matrice de dimension $(m;p)$ où l'élément $p_{i,j}$ de la matrice $AB$ est égal à l'unique élément de la matrice $L_jC_i$.*

**Exemple:**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix}$$

**Propriété:**
*Soient $A$, $B$ et $C$ des matrices carrées d'ordre $n$ et $k$ un réel :*
- $A(BC) = (AB)C$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- $A(B + C) = AB + AC$ *et* $(A + B)C = AC + BC$
- *Le produit de matrices n'est pas commutatif, c'est à dire que $AB = BA$ dans des cas particuliers.*

## 3 Puissance d'une matrice

**Définition:**
*Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ :*

- *On appelle matrice diagonale une matrice carré dont les éléments non-diagonaux sont tous nuls.*
- *On appelle matrice unité ( ou matrice identité) la matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1. Cette matrice est notée $I_n$.*
- *On définit par $A^2$ par $A^2 = A \times A$ et pour tout entier naturel non-nul $p$, on définit par $A^p$ par $A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{p\,fois}$*

**Exemple:**
*La matrice $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, ses éléments diagonaux sont $a_{1,1} = 7$ et $a_{2,2} = -3$.*

*La matrice unité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*

*Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 19 & 18 \\ 27 & 19 \end{pmatrix}$*

**Propriété:**
*Soit $D$ une matrice diagonale d'ordre $n$ d'éléments diagonaux $d_{1,1}, \ldots, d_{n,n}$ alors pour tout entier $p$ non-nul, $D^p$ est aussi une matrice diagonale d'ordre $n$ d'éléments diagonaux $(d_{1,1})^p, \ldots, (d_{n,n})^p$*

**Exemple:**
*Soit la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ alors $D^2 = \begin{pmatrix} 7^2 & 0 \\ 0 & (-3)^2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 7^3 & 0 \\ 0 & (-3)^3 \end{pmatrix}$*

## 4 Matrice inverse

**Définition:**
*Soit une matrice carrée d'ordre $n$. S'il existe une matrice $B$ telle que $AB = BA = I_n$ alors la matrice $A$ est dite inversible.*

**Exemple:**
*Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ alors $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $A$ est inversible.*

**Propriété:**
*Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. Si $B$ est une matrice carrée d'ordre $n$ telle que $AB = I_n$ alors $BA = I_n$.*
*$B$ est l'unique matrice qui vérifie ces deux égalités. Cette matrice $B$ est appelée matrice inverse de $A$ et est notée $A^{-1}$ :*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

**Remarque:**
*Il existe des matrices carrées non-inversible. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.*

*En effet, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.*

*Ainsi, s'il existe $B$ tel que $AB = BA = I_2$ alors $BA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = BA\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ soit $I_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ c'est à dire $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$*

**Propriété:**
*Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.*

*$A$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$ et alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$*

## 5 Systèmes linéaires

On considère le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ x + 4y = 11 \end{cases}$$

Ce système peut aussi s'écrire $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$

Un tel système est appelé système linéaire.

**Propriété:**

*Si un système linéaire a pour écriture matricielle $AX = B$, où $A$ est une matrice inversible d'ordre $n$ et $B$ est une matrice colonne à $n$ lignes alors ce sytème possède une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.*

Dans l'exemple ci-dessus $A$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

donc la solution du système $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ x + 4y = 11 \end{cases}$ est $X = A^{-1}B$ soit $\begin{pmatrix} \frac{67}{13} \\ \frac{19}{13} \end{pmatrix}$