<table>
<tr><td colspan="3">BAC BLANC</td></tr>
<tr><td>Enseignants : SECHER P.
GREAU D.</td><td>Date : 02/02/2016</td><td>Durée : 4 heures</td></tr>
</table>

Exercice 1: 3 points

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.
La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.

On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.

On choisit une pièce au hasard et on considère les événements suivants :

- A : « La pièce est produite par la machine A »
- B : « La pièce est produite par la machine B »
- D : « La pièce a un défaut ».

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.
3. Déterminer probabilité de l'événement D.
4. On constate que la pièce choisie a un défaut. Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

Exercice 2: 6 points

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x} + x - 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geq 0$.
2. En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.
3. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. Pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, démontrer que $g'(x) = 5(1 - x)\mathrm{e}^{-x}$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ que l'on déterminera. En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathcal{A}$ définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t - 3)]\,\mathrm{d}t.$$

1. Hachurer sur le graphique donné en **annexe** le domaine dont l'aire est donnée par $\mathcal{A}(2)$.
2. Justifier que la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif, on a $\mathcal{A}(x) = 5 - (5x + 5)\mathrm{e}^{-x}$. Déterminer $\mathcal{A}(2)$.
4. Démontrer qu'il existe une unique valeur de $x \in [0\ ;\ 2]$ telle que $\mathcal{A}(x) = 1$.

Exercice 3: 6 points

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{5}u_n + 3\times 0,5^n. \end{array}\right.$$

1. a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchée à 10^{-2} près donné en **annexe**.
   b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) pour $n \geq 1$.
2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a
$$u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^n.$$
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et $u_n \leqslant 0$.
   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
   Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times 0,5^n$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).
   b. En déduire, que pour tout entier naturel n,
$$u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n.$$
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n)
4. Compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme donné en **annexe**, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Exercice 4: 5 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormée et on considère :

- les points $A(1\ ;\ 1;\ 0)$, $B(3\ ;0\ ;\ -1)$ et $C(7\ ;1\ ;\ -2)$;
- le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1;-1;3)$ passant par $M(1;2;0)$;
- la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = -5+3t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$

Proposition 1 : Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 2 : Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles.

Proposition 3 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = -t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$

Proposition 4 : Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 5 : La droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ au point E de coordonnées $(8;\ -3;\ -4)$.

Exercice 5: 5 points

Un lycéen sportif et soucieux de sa santé décide d'arrêter de fumer [1]. On choisit d'utiliser la modélisation suivante pour observer l'évolution :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de $0,9$;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de $0,6$.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n, la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer. On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1.
2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n). Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			
5	4	0,75	0,25	

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.

a. Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?

b. Compléter le tableau ci-dessus donné aussi en **annexe**.

3. Soit X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice carrée M tel que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = M \times X_n$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M et de X_0.

4. Dans cette question, on va déterminer M^n pour tout entier naturel n.
Pour cela, on définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que $M = A + 0,5B$.

b. Déterminer A^2, B^2, $A \times B$ et $B \times A$.

c. Que peut-on en déduire pour A^n et B^n pour tout entier naturel non-nul n ?

d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0,5^n B$.

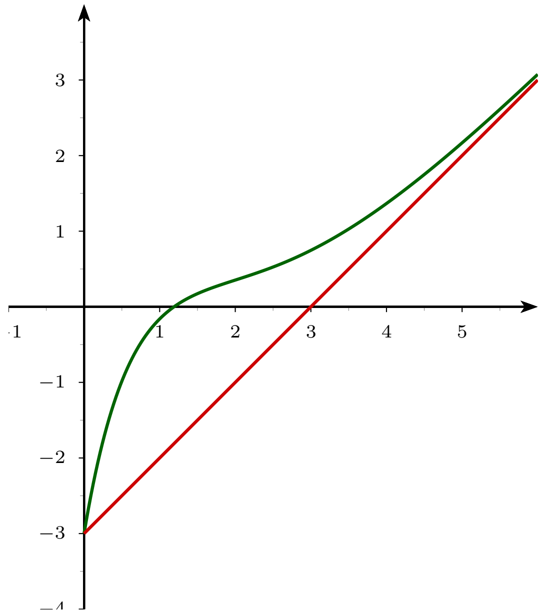
Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,8 + 0,2 \times 0,5^n & 0,8 - 0,8 \times 0,5^n \\ 0,2 - 0,2 \times 0,5^n & 0,2 + 0,8 \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.
6. A long terme, peut-on affirmer avec certitude que ce lycéen arrêtera de fumer ?

1. Cet exercice a été inventé par un autre. En conséquence, toute évocation de personne existant ou ayant existé, ne saurait être que coïncidence fortuite...

ANNEXE		
Nom :	**Prénom** :	**Classe** :



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			
5	4	0,75	0,25	