

Convergence des suites monotones

Exercice 1:

Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{4n-4}{n^2+3}$ est bornée.

Théorème: (admis)

- Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.

Exercice 2:

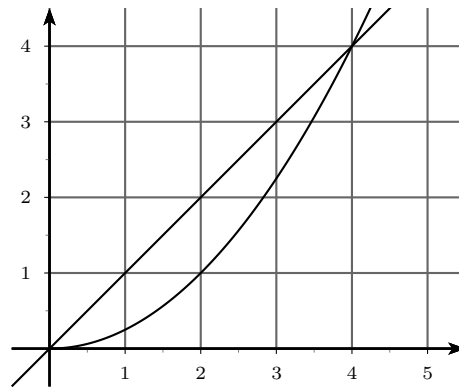
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5}$.

1. À l'aide de la calculatrice, observer le comportement de cette suite.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $u_n > 0$.
3. Démontrer que la suite est décroissante.
4. (u_n) converge-t-elle? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 3:

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$.

1. On a tracé ci-dessous la courbe d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ et la droite d'équation $y = x$. Placer u_0, u_1, u_2 et u_3 .



2. Montrer, par récurrence, que pour tout n non-nul, $0 \leq u_n \leq 3$
3. Étudier le sens de variations de la suite (u_n) .
4. (u_n) converge-t-elle? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 4:

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n , par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{8u_n+3}{u_n+6}$.

1. Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{8x+3}{x+6}$ sur $[1; 3]$.
2. Démontrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $1 \leq u_n \leq 3$.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. (u_n) converge-t-elle? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 5:

Démontrer le théorème ci-dessous :

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 6:

Démontrer le théorème ci-dessous :

Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite l alors pour tout entier naturel n , $u_n \leq l$.