

Chapitre 10: Suites IV

Définition:

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier n ,

- s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n alors on dit que (u_n) est majorée par M .
 M est alors un majorant de la suite (u_n) ;
- s'il existe un réel m tel que $m \leq u_n$ pour tout n alors on dit que (u_n) est minorée par m .
 m est alors un minorant de la suite (u_n) ;
- si (u_n) est à la fois majorée et minorée, on dit que (u_n) est bornée.

Théorème: (admis)

- Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.

Remarque:

Cette propriété permet de montrer qu'une suite est convergente mais ne fournit pas sa limite.

Propriété:

- Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration:

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

- (u_n) est non-majorée donc pour tout réel $A > 0$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$;
- (u_n) est croissante donc pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > A$.

Ainsi, quelque soit $A > 0$, il existe n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n_0} > A$ ce qui revient à dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Propriété:

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier n .

- Si (u_n) est croissante et admet pour limite l alors pour tout entier naturel n , $u_n \leq l$.
- Si (u_n) est décroissante et admet pour limite l alors pour tout entier naturel n , $u_n \geq l$.

Démonstration:

Supposons (par l'absurde) qu'il existe un terme de la suite noté u_{n_0} tel que $u_{n_0} > l$.

Posons $d = |u_{n_0} - l|$. Par construction, $u_{n_0} > l + \frac{d}{2}$ et (u_n) est croissante donc l'intervalle ouvert $\left] l - \frac{d}{2}; l + \frac{d}{2} \right[$ contient uniquement les termes de la suite pour $n < n_0$ soit un nombre fini ce qui contredit la définition de la limite l . Ainsi, tout entier naturel n , $u_n \leq l$.

Théorème:

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) a une limite finie l et si f est continue en l , alors $l = f(l)$.

Démonstration:

(u_n) converge vers l donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Posons $x = u_n$, comme f est continue en l donc $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = f(l)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(l)$.

Les suites (u_n) et (u_{n+1}) ont la même limite donc $l = f(l)$.