Exercices type bac

Exercice 1:
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u+0,5(k-1)-1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

1. a. Faire fonctionner cet algorithme pour $p=2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
   b. Quel nombre obtient-on en sortie ?
2. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1}=0,5u_n+0,5n-1,5$$

   a. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
   b. A l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p=4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0,5$	$-0,75$	$-0,375$

   Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.
   c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1}>u_n$. Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=0,1u_n-0,1n+0,5$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,5$ et exprimer alors v_n en fonction de n.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n=10\times 0,5^n+n-5.$$

   c. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 2:
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=5-\frac{4}{x+2}$$

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On note α la solution. On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
   a. A l'aide de la calculatrice, quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
   b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,

$$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$$

   où α est le réel défini dans la question 2.
   c. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
4. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\cdots+u_n.$$

   a. Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
   b. Écrire un algorithme qui donne la somme S_n en fonction de la valeur de l'entier n demandée par l'utilisateur.
   c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.