Lien entre dérivabilité et continuité

1 Retour en première

Définition:
f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a)$ si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a) \quad \texttt{ou} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

Ainsi, dire que f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a)$ signifie que la courbe de la fonction f admet en $A(a;f(a))$ une tangente non-verticale d'équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x+1$
   a. Montrer que f est dérivable en 4 à l'aide de la définition ci-dessous.
   b. Déterminer d'une autre façon $f'(4)$.
   c. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 4.
   d. Déterminer l'équation de la tangente T' à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 6.
   e. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de T et de T'.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=|x|$
   a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que g n'est pas dérivable en 0.
   c. Conclure.

2 De la dérivabilité à la continuité

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a\in I$
   a. Déterminer le domaine de définition de la fonction T définie par $T(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0}T(h)$
   c. Montrer que pour tout h non-nul, $f(a+h)=f(a)+hT(h)$.
   d. On pose $x=a+h$. Déterminer $\lim\limits_{x\to a}f(x)$.
   e. Conclure
2. Donner des exemples de fonctions continues sur un intervalle I mais qui ne sont pas dérivable sur I.
3. Étudier la continuité des fonctions polynômes et rationnelles sur leurs domaines de définition.