Chapitre 11: Dérivation

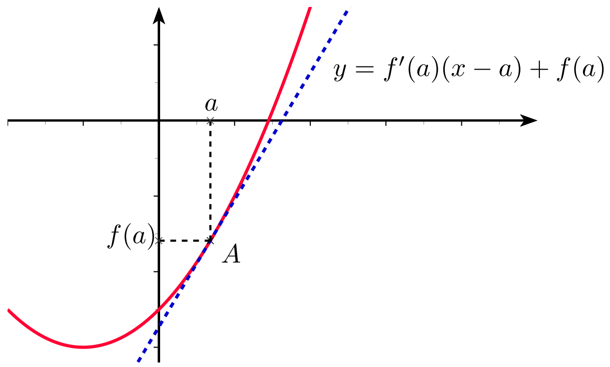
Dans ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel appartenant à I.

1 Dérivabilité

Définition:
f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a)$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Ainsi, dire que f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a)$ signifie que la courbe de la fonction f admet en $A(a;f(a))$ une tangente non-verticale d'équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$



2 Lien entre dérivabilité et continuité

Théorème:
Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration:
Soit T la fonction définie par $T(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pour $h \neq 0$ avec $a+h \in I$.
f est dérivable en a donc T a pour limite $f'(a)$ lorsque h tend vers 0. Ainsi,pour $h \neq 0$:

$$T(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \iff hT(h) = f(a+h)-f(a) \iff f(a+h) = f(a)+hT(h)$$

Comme $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = f'(a)$ on a $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.
On pose $x = a+h$ soit $h = x-a$ et on obtient : $\lim\limits_{x-a \to 0} f(x) = f(a)$ soit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ donc f est continue en a.

Remarque:
La réciproque de ce théorème est fausse : la fonction racine carrée est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Théorème:
Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

3 Conséquences

On a montré en première que les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, que les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur domaine de définition et que la fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc ces fonctions sont continues sur leur domaine de définition d'après le théorème précédent.
Cependant pour la fonction racine carrée, on peut montrer qu'elle est aussi continue en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

4 Dérivées de fonctions composées

4.1 Rappels

f	f dérivable sur	f'
$f(x) = k$ sur $\mathbb{R}$ avec k réel	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$

4.2 Fonctions composées

Théorème:
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel :

- *Pour $n \geq 2$, la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$;*
- *Pour $n \geq 1$, la fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$.*
  Cette égalité ce note aussi : $(u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}$

Exemples:

- *La fonction $f : x \longmapsto (4x-5)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 \times 4 \times (4x-5)^{3-1}$ soit $f'(x) = 12(4x-5)^2$*
- *La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{(x^2+1)^4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -4 \times 2x \times \frac{1}{(x^2+1)^{4+1}}$ soit $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2+1)^5}$*

Théorème:
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I tel que pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) > 0$.
La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemple:
La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{7x-2}$ est dérivable sur $\left]\frac{2}{7};+\infty\right[$ et $f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x-2}}$

4.3 Généralisation

Théorème:
Soit f dérivable sur J et u dérivable sur I telles que $u(x) \in J$ pour tout x de I. La fonction $g = f \circ u$ est alors dérivable sur I et :

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$