Chapitre 13: Intégration I

1 Primitive

1.1 Définition

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout x de I,

$$F'(x) = f(x)$$

Si elle existe, on note usuellement F la primitive d'une fonction f.

Exemple:
$\left(2x^2\right)' = 4x$ *donc la fonction* $F : x \mapsto 2x^2$ *est une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* $f : x \mapsto 4x$

Théorème:
f est une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I.

- *La fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$, où k est un réel est aussi une primitive de f sur I.*
- *Toute primitive de f sur I est de la forme $F + k$.*
- *$x_0 \in I$ et y_0 un nombre réel. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = y_0$.*

1.2 Primitives de fonctions usuelles

Propriété:
Dans le tableau ci-dessous figure la primitive la plus usuelle c'est à dire sans constante.

Fonction définie par $f(x) = \dots$	*Une primitive de* f *est définie par* $F(x) = \dots$	*sur* $I = \dots$
x^n *où* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \textit{pour} \quad n \geq 0 \\ ]-\infty; 0[\textit{ ou }]0; +\infty[& \textit{pour} \quad n \leq -2 \end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

1.3 Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété:

- *F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.*
- *F est une primitive de la fonction f sur I et k est un nombre réel alors $k \cdot F$ est une primitive de $k \cdot f$ sur I.*

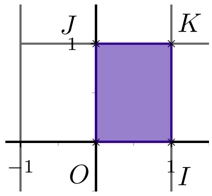
Propriété:
Dans le tableau ci-dessous u désigne une fonction dérivable sur I.

Fonction définie par $f(x) = \dots$	*Une primitive de* f *est définie par* $F(x) = \dots$	*Conditions*
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ *pour tout* x *de* I
$u' \cdot u^n$ *où* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	*pour* $n \leq -2$, $u(x) \neq 0$ *pour tout* x *de* I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ *pour tout* x *de* I

2 Notion d'intégrale

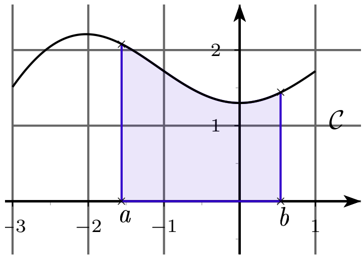
Dans un repère orthogonal $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, l'unité d'aire (U.A) est l'aire du rectangle $OIKJ$.
Dans la suite :

- toutes les courbes sont représentées dans un repère orthogonal ;
- toutes les aires sont données dans l'unité d'aire associée au repère.



Définition:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$ est l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.



$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathtt{d}x$ *se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathtt{d}x$ ».*

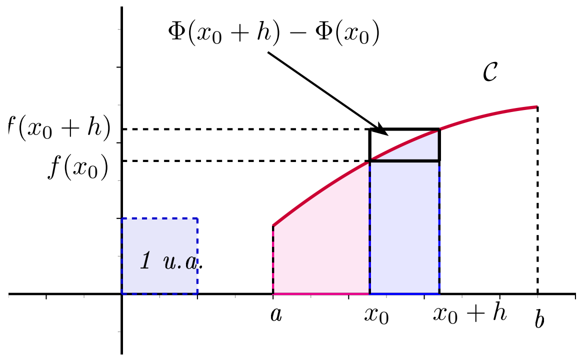
Remarque:
La variable x n'a pas d'importance, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathtt{d}x = \int_a^b f(t)\mathtt{d}t = \int_a^b f(q)\mathtt{d}q$.

Propriété:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathtt{d}x \geqslant 0$.

3 Intégrale d'une fonction continue et conséquences

Théorème:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors la fonction $\Phi : x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\Phi' = f$

Démonstration: (R.O.C.)
On se place dans le cas où f est croissante sur $[a;b]$. Soit x_0 et h deux nombres tels que $x_0 \in [a,b]$, $x_0+h \in [a;b]$ et $h \neq 0$.



- *Si $h > 0$, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0+h)$. De plus, $\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)$ exprime l'aire sous $\mathcal{C}$ sur $[x_0;x_0+h]$ donc l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire des rectangles de largeur h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ d'où :*

$$h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0+h)-\Phi(x_0) \leq h \times f(x_0+h)$$

  et comme h est non-nul et positif, on obtient : $f(x_0) \leq \dfrac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$

- *Si $h < 0$, on démontre de la même manière que : $f(x_0+h) \leq \dfrac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$*

Par continuité de f en x_0, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Ainsi Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ pour tout réel x_0 de $[a;b]$ donc Φ est dérivable sur $[a;b]$ et $\Phi' = f$

Corollaire:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors la fonction f admet une primitive Φ sur $[a;b]$ définie par $\Phi : x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Théorème: (fondamental)
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f.

Démonstration:
f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ donc $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est aussi une primitive de f sur $[a;b]$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + k$ sur $[a;b]$. De plus $F(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t + k = k$ donc $k = F(a)$ donc $F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + F(a)$ soit $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$