

Chapitre 13: Intégration I

1 Primitive

1.1 Définition

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout x de I ,

$$F'(x) = f(x)$$

Si elle existe, on note usuellement F la primitive d'une fonction f .

Exemple:

.

Théorème:

f est une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I .

- .
- .
- .

1.2 Primitives de fonctions usuelles

Propriété:

Dans le tableau ci-dessous figure la primitive la plus usuelle c'est à dire sans constante.

Fonction définie par $f(x) = \dots$	Une primitive de f est définie par $F(x) = \dots$	sur $I = \dots$
x^n où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$		$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{pour } n \geq 0 \\]-\infty; 0[\text{ ou }]0; +\infty[& \text{pour } n \leq -2 \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$		$]0; +\infty[$
$\cos x$		$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\mathbb{R}$

1.3 Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété:

- F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- F est une primitive de la fonction f sur I et k est un nombre réel alors $k \cdot F$ est une primitive de $k \cdot f$ sur I .

Propriété:

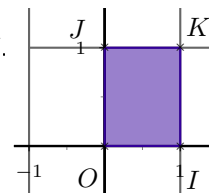
Dans le tableau ci-dessous u désigne une fonction dérivable sur I .

Fonction définie par $f(x) = \dots$	Une primitive de f est définie par $F(x) = \dots$	Conditions
$\frac{u'}{u^2}$		$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$u' \cdot u^n$ où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$		pour $n \leq -2$, $u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$		$u(x) > 0$ pour tout x de I

2 Notion d'intégrale

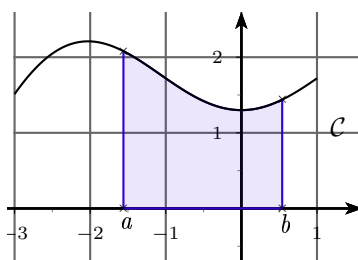
Dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, l'unité d'aire (U.A) est l'aire du rectangle $OIKJ$.
 Dans la suite :

- toutes les courbes sont représentées dans un repère orthogonal;
- toutes les aires sont données dans l'unité d'aire associée au repère.



Définition:

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.



$\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)dx$ ».

Remarque:

La variable x n'a pas d'importance, on a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(q)dq$.

Propriété:

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors