

Intégrale d'une fonction continue

Exercice 1:

On considère une fonction f **continue et positive** sur $[a; b]$. On va démontrer que $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$. Pour cela, on se place dans le cas particulier où f est croissante sur $[a; b]$.

1. Soit $x_0 \in [a; b]$ et h un réel non-nul tel que $x_0 + h \in [a; b]$.

a. Pour $h > 0$, déterminer à quoi correspond

$$\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)$$

puis démontrer que :

$$f(x_0) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

b. Pour $h < 0$, déterminer à quoi correspond

$$\Phi(x_0) - \Phi(x_0 + h)$$

puis démontrer que :

$$f(x_0 + h) \leq \frac{\Phi(x_0) - \Phi(x_0 + h)}{h} \leq f(x_0)$$

2. En déduire que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

3. Conclure.

Exercice 2:

Montrer que si f une fonction **continue et positive** sur un intervalle I contenant a et b ,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f .

Exercice 3:

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^2 2x^3 dx$

c. $\int_1^2 \frac{5}{2\sqrt{x}} dx$

e. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt$

b. $\int_1^2 x^2 + 6x - 4 dx$

d. $\int_1^3 \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx$

f. $\int_1^2 1 - \frac{1}{x^2} dx$