

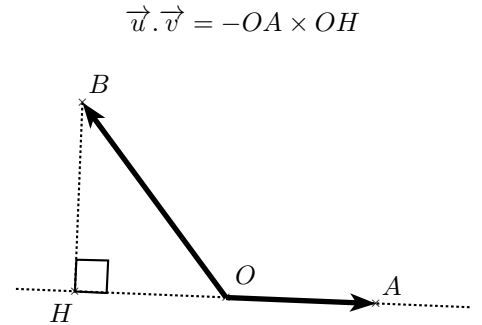
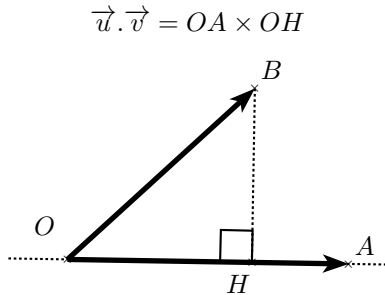
Chapitre 15: Produit scalaire I

Dans ce chapitre, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 Produit scalaire dans le plan

Définition:

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non-nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$, où H est le projeté orthogonal de B sur (OA) .

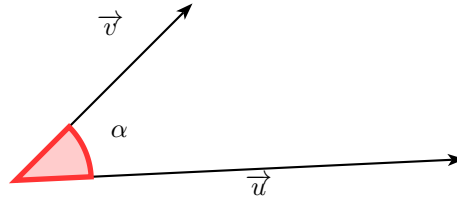


Définition:

Pour tous vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$$

où α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.



Définition:

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque:

Si $\vec{u}(x; y)$ alors $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$ et comme $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, on a :

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Définition:

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Propriété:

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété:

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel k :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k \times \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

2 Produit scalaire dans l'espace

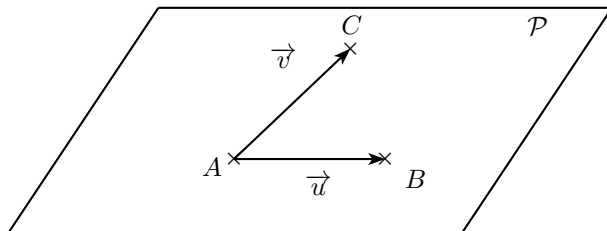
2.1 Définition

Définition:

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et trois points A , B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant A , B et C .

$\vec{u} \cdot \vec{v}$, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{P}$.



Propriété:

Toutes les propriétés vues sur le produit scalaire dans le plan sont encore valables dans l'espace.

2.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriété:

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Remarque:

Soit A et B deux points de l'espace, comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ c'est à dire $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$, on retrouve la formule de la distance :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

3 Orthogonalité dans l'espace

3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition:

Deux vecteurs de l'espace sont dits orthogonaux si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont orthogonales.

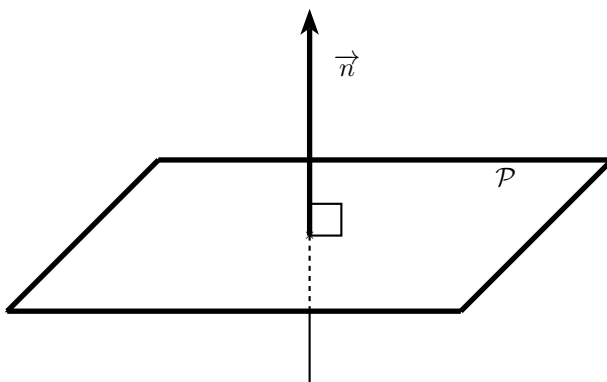
Propriété:

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3.2 Vecteur normal à un plan

Définition:

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur formé par deux points de $\mathcal{P}$



3.3 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition:

Le plan $\mathcal{P}$ qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

