

# Linéarité de l'intégrale et conséquences

## Exercice 1:

Démontrer le théorème suivant :

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a; b]$  et  $\lambda$  un nombre réel :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)] \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$
- $\int_a^b \lambda f(x) \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$

## Exercice 2:

Démontrer que  $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e - 1$  et  $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ .

En déduire à l'aide de la linéarité de l'intégrale  $\int_0^1 5e^x - 3x^2 \mathrm{d}x$  et  $\int_0^1 e^x + 5x^2 \mathrm{d}x$ .

## Exercice 3:

Démontrer le théorème suivant :

Pour  $a < b$ , si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in [a; b]$  alors  $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$

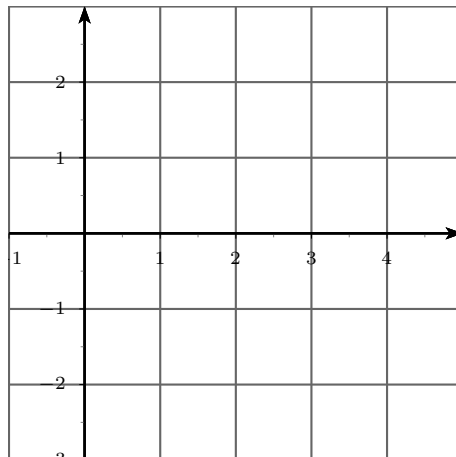
## Exercice 4:

Démontrer à l'aide d'un exemple que la réciproque du théorème ci-dessous est fausse.

## Exercice 5:

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$

1. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction  $f$  sur  $[0; 4]$ .



2. Déterminer le signe de  $f$  sur  $[0; 4]$ .

3. Calculer  $\int_0^4 f(x) \mathrm{d}x$ .

4. En déduire l'aire entre la courbe de la fonction  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 4$ .

## Exercice 6:

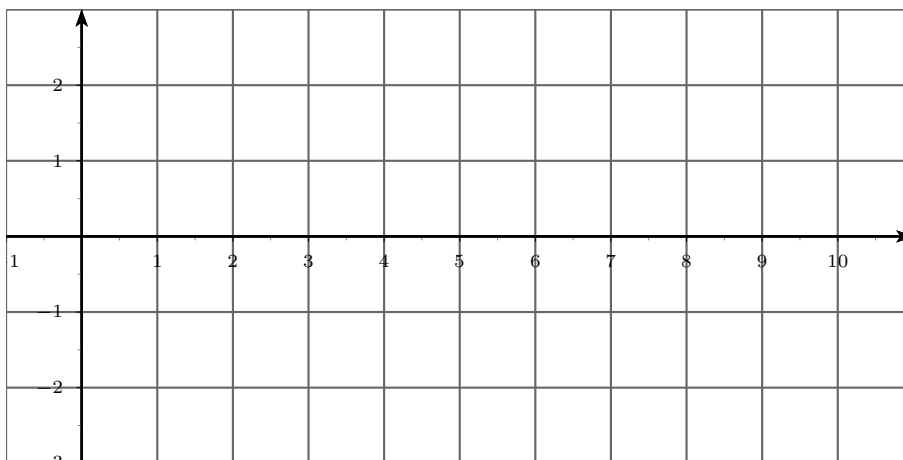
Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{-2}{(1-x)^2}$ .

Déterminer l'aire entre la courbe de la fonction  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 2$  et  $x = 10$ .

**Exercice 7:**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 4 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3} & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

1. Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe de la fonction  $f$  sur  $[0; 10]$ .



3. Déterminer le signe de  $f$  sur  $[0; 10]$ .
4. Calculer  $\int_0^2 f(x)dx$ ,  $\int_2^4 f(x)dx$ ,  $\int_4^7 f(x)dx$ ,  $\int_7^{10} f(x)dx$ .
5. En déduire l'aire entre la courbe de la fonction  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 10$ .

**Exercice 8:**

Déterminer l'aire située entre les courbes des fonctions carré et racine carrée pour  $x \in [0; 1]$  :

