

Introduction

1 Définition

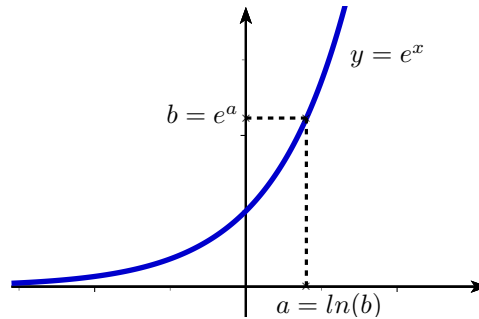
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $b \in]0; +\infty[$, il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$e^a = b$$

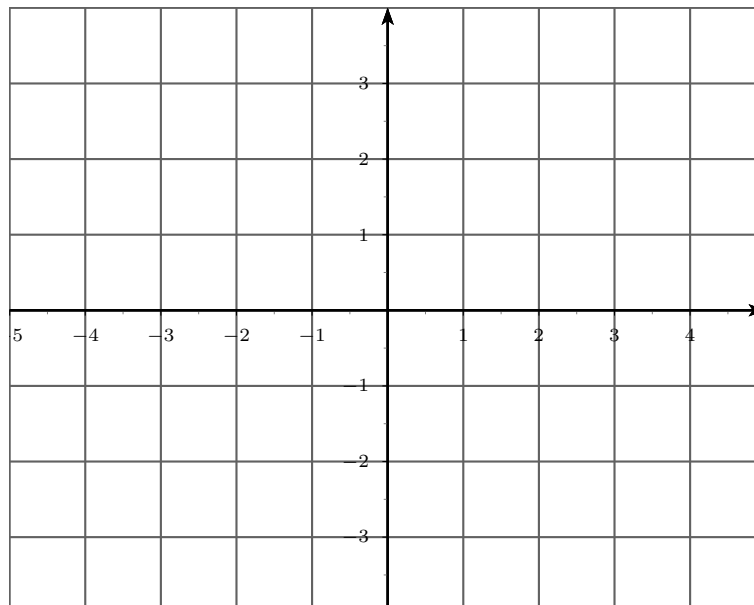
Ce nombre a est noté $\ln(b)$ ou $\ln b$ ce qui se dit « logarithme népérien¹ de b ».



Cela permet de définir la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$ et on obtient l'équivalence suivante :

$$e^a = b \iff a = \ln b$$

1. Pourquoi ne peut-on pas définir la fonction logarithme sur $] -\infty; 0]$?
2. Pour $b > 0$, simplifier $e^{\ln(b)}$.
3. Déterminer les réels $\ln(1)$, $\ln(e)$, $\ln(e^2)$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$?
4. A l'aide du tableau de valeur de la fonction exponentielle, donner une valeur approchée à 10^{-1} près de $\ln(3)$.
5. Soit a un nombre réel. Simplifier $e^{\ln(e^a)}$. Que peut-on en déduire pour $\ln(e^a)$?
6. À l'aide de la touche **ln** de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction logarithme dans le repère ci-dessous :



1. John Napier (1550-1617), en France Neper, est un mathématicien écossais.

7. Tracer dans ce même repère la courbe de la fonction exponentielle et la droite d'équation $y = x$.
8. Que remarque t'on ?
9. Conjecturer :
 - a. le sens de variation de la fonction $x \mapsto \ln(x)$;
 - b. les limites de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 1:

Pour quelles valeurs de x , les expressions suivantes ont-elles un sens :

1. $\ln(1 - x^2)$
2. $\ln(2 + 3x) - \ln(-x + 1)$
3. $\ln\left(\frac{x^2 - 4x + 3}{e^{2x+1}}\right)$

Exercice 2:

En utilisant le fait que les fonctions $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont réciproques, résoudre les équations suivantes :

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|---|--|
| 1. $e^x = 1$ | 6. $e^{-x} = -5$ | 11. $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1$ | 16. $\ln(3x+1) = \ln(5x-2)$ |
| 2. $e^x = 4$ | 7. $\ln(x) = 3$ | 12. $\ln(x^2) = 4$ | 17. $\ln(x^2 + x - 2) \leq \ln(x + 3)$ |
| 3. $e^{2x} = 2$ | 8. $\ln(2x) = 0$ | 13. $\ln(x) < 2$ | 18. $\ln(x^2 - 8) > 0$ |
| 4. $4e^{-x} - 3 = 12$ | 9. $2\ln(x) - 1 = 6$ | 14. $\ln(x) = -10$ | 19. $\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$ |
| 5. $e^{2x-1} = 2$ | 10. $\ln(2x - 1) = 3$ | 15. $\ln(3x - 1) > -1$ | 20. $\ln(x - 2) \geq \ln(2x - 1)$ |

2 Dérivée, variations et signe

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \exp[\ln(x)]$.

1. a. En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, exprimer $f'(x)$ en fonction de $\ln'(x)$
On admettra que $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 b. Simplifier $f(x)$ et utiliser cette simplification pour calculer facilement $f'(x)$.
 c. En déduire $\ln'(x)$.
 2. Valider la conjecture sur les variations de $x \mapsto \ln(x)$.
 3. En déduire le signe de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 1:

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants en précisant au préalable le domaine de dérivabilité de la fonction f :

1. $f(x) = 4\ln(x) + 3x + 1$
2. $f(x) = \frac{\ln(x)}{2x+1}$
3. $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$

Exercice 2:

Étudier les variations des fonctions f suivantes en précisant au préalable leur domaine de définition :

1. $f(x) = \ln(x) - x + 6$
2. $f(x) = x \ln(x)$
3. $f(x) = [\ln(x)]^2$