Du discret au continu

Exercice 1:

Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés cubiques équilibrés et à écrire à partir du couple (a, b) obtenu, formé des chiffres des faces, l'équation $ax^2 + bx + 1 = 0$.

1. Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. On désigne par X la variable aléatoire associant à l'équation obtenue le nombre de ses solutions réels.
   a. Déterminer $X(\Omega)$.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 2:

On considère l'expérience aléatoire : « on tire une boule dans une urne qui contient 4 boules noires et 6 boules rouges » et on s'intéresse à la sortie d'une boule rouge. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X

Exercice 3:

On considère l'épreuve aléatoire : « on lance six fois de suite un dé équilibré à six faces » et on s'intéresse au nombre de fois où le numéro 6 est sorti lors des six lancers. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de fois où le numéro 6 est sorti lors des six lancers.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Déterminer $P(X \leq 2)$
3. Déterminer l'espérance et la variance de X

Exercice 4:

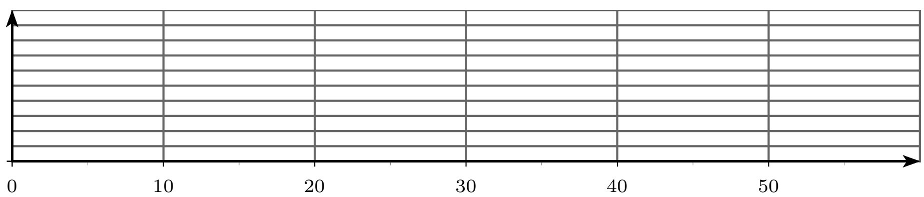
Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1. Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants. Déterminer la probabilité pour que le joueur perde trois fois au cours d'une partie.

Exercice 5:

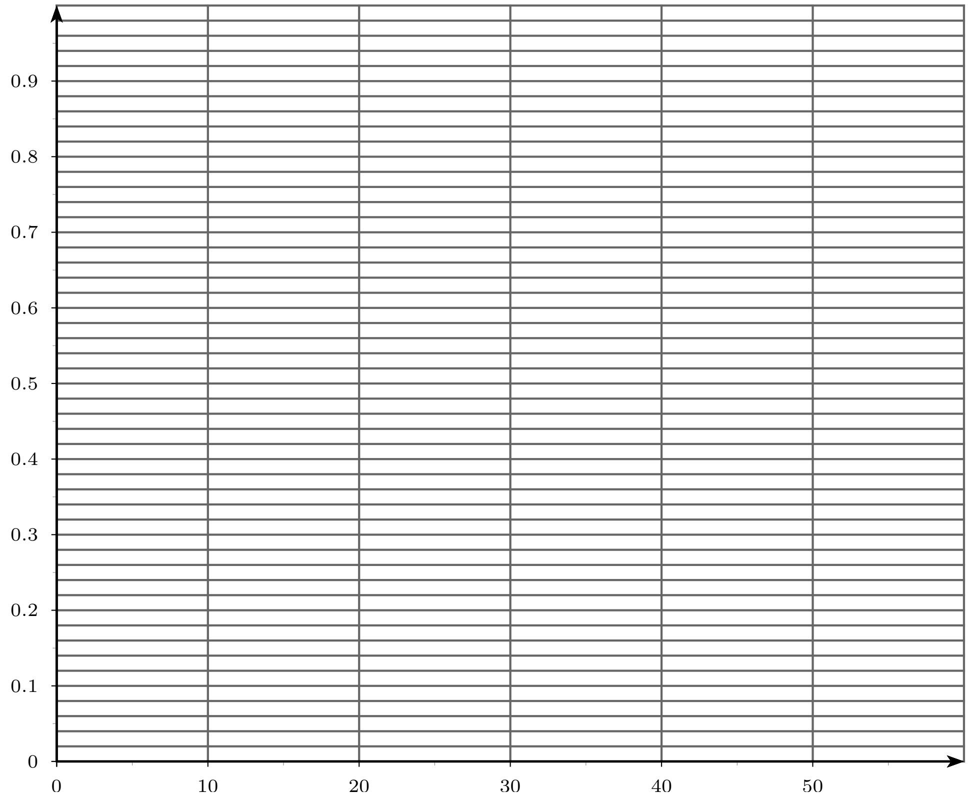
On a étudié le temps mis par les élèves d'un lycée pour effectuer le trajet domicile-lycée. Cette étude a conduit aux résultats suivants :

temps (min)	$[0;10[$	$[10;20[$	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[50;60]$
fréquence	$0,1$	$0,18$	$0,31$	$0,28$	$0,1$	$0,03$
f.c.c.						

1. Tracer l'histogramme des fréquences dans le repère ci-dessous :



2. Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes (f.c.c.) dans le repère ci-dessous :



3. On choisit au hasard un élève dans cette population et on note X le temps du trajet domicile-lycée.
   a. Donner $X(\Omega)$.
   b. Déterminer la probabilité que la valeur X soit inférieur à 40.
   c. Déterminer l'aire de la partie de l'histogramme pour $x \in [0;40[$. Conclure.
   d. Déterminer la probabilité que la valeur X soit compris entre à 20 et 50.
   e. Déterminer la probabilité que la valeur X soit supérieur 30.

   De manière générale, si $x \in [0;60]$, on peut déterminer la probabilité $P(X < x)$. Cette probabilité est la valeur de l'aire de la partie de l'histogramme située avant la valeur x (l'aire totale étant 1 unité) ou encore la valeur de la fréquence cumulée croissante correspondant à x.

   On obtient alors que : $P(X \leq x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ La fonction f est appelée **densité de probabilité** de X.
4. Déterminer f dans l'exemple suivant.

Un peu de cours...
Une densité de probabilité f associé à une variable aléatoire X est une fonction continue (sauf en un nombre fini de points) sur un intervalle $I = [a;b]$ et positive et telle que :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 1$$

On a alors pour $x \in [a;b]$

$$P(X \leq x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 6:

On tire au hasard sur une cible de rayon 1 mètre sans jamais la manquer. X est la variable aléatoire qui donne la distance de l'impact au centre. On admet que X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0;1] \\ 0 & si \quad x \notin [0;1] \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Tracer la courbe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $P(X < 0,5)$, $P(X \geq 0,5)$, $P(0,2 \leq X \leq 0,8)$, et $P(X = 0,5)$.
4. Vérifier que si $0 \leq a < b < 1$ alors $P(a \leq X \leq b)$ est égale au rapport de l'aire de la couronne, définie par a et b et celle de la cible.