

Chapitre 20: Loi à densité

1 Lois de probabilité à densité

1.1 Introduction

En première, on a introduit la notion de variable aléatoire X sur des ensembles Ω finis. Pour définir la loi de la variable aléatoire X , il nous suffisait de donner $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et de déterminer $P(X = x_k)$ pour $k \in [1; n]$. Par exemple, si on considère l'expérience suivante :

Un joueur lance deux fois une pièce équilibrée; il gagne 2 euros par « pile » obtenu et perd 1 euro par « face » obtenu. On modélise l'expérience grâce à l'univers $\Omega = \{2P; 1F1P; 2F\}$ et la loi de probabilité :

Issue	$2P$	$1F1P$	$2F$
Probabilité			

La variable aléatoire X qui à chaque issue associe le gain algébrique correspondant du joueur est définie par

$$X(\Omega) = \{.....\}$$

et :

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$			

On considère l'expérience suivante :

On tire sur une cible circulaire de 1 mètre de rayon sans jamais la manquer.

La variable aléatoire X qui indique la distance, en mètre, du point d'impact au centre prend toutes les valeurs de $[0; 1]$.

Dans ces conditions, il n'est plus possible de définir la loi de X en dressant le tableau des probabilités de chacun des événements $X = x_i$ puisqu'il y en a une infinité. Une autre approche est alors nécessaire. On va donc s'intéresser aux événements du type « X prend ses valeurs dans J » notés « $X \in J$ ». Il s'agit alors de définir la probabilité de $P(X \in J)$.

Dans notre exemple, $P(X \notin [0; 1]) = \dots$ donc on peut déterminer la loi de X , on cherchera à déterminer $P(X \in [0; r]) = P(X \leq r)$ avec $r \in [0; 1]$.

1.2 Variable aléatoire suivant une loi à densité

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle (borné ou non) de \mathbb{R} .

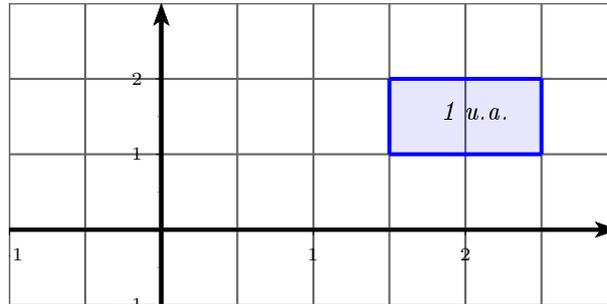
Définition:

On appelle *densité de probabilité sur I* toute fonction définie sur I telle que :

Exemple:

Dans l'exemple de la cible, on a $I = [0; 1]$ et on admet que X a pour densité la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0; 1] \end{cases}$$



Définition:

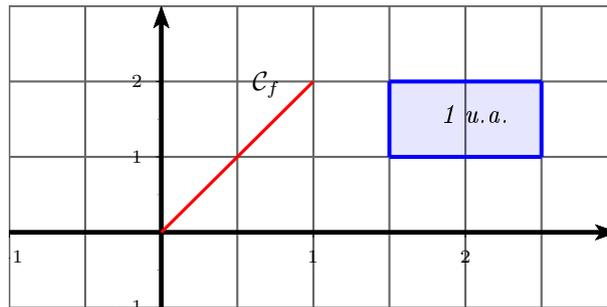
f désigne une densité de probabilité définie sur I . Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi de densité f signifie qu'à tout intervalle $J \subset I$, on associe la probabilité :

$$P(X \in J) = \dots\dots\dots$$

où \mathcal{D}_f est le domaine sous la courbe \mathcal{C}_f sur l'intervalle J .

Exemple:

Pour déterminer la probabilité que la flèche soit arrivée à une distance comprise entre 0,25 et 0,75 mètre du centre, on calcule l'aire sous la courbe entre 0,25 et 0,75 soit :



On a donc

$$\begin{aligned} P(X \in [0, 25; 075]) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Attention, si on cherche à déterminer $P(X = 0, 25)$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X = 0, 25) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que X prenne une valeur isolée de l'intervalle $[0; 1]$ est nulle et cela se généralise pour toutes les variables aléatoires suivant une loi à densité. On en déduit donc que pour toutes les variables aléatoires suivant une loi à densité :

$$P(X \leq a) \dots\dots P(X < a)$$

Remarque:

Pour tout intervalle $J \subset I$, on a $P(X \notin J) = \dots\dots\dots$