Premiers calculs dans $\mathbb{C}$ et conjugué d'un nombre complexe

Exercice 1:

Soit $z = 3 - 4i$ et $z' = -1 + 2i$ deux nombres complexes. Déterminer sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z + z' \quad z \times z' \quad z^2 \quad z + iz' \quad \frac{z}{z'}$$

Faire le même exercice avec $z = 4 + i$ et $z' = -1 - i$.

Exercice 2:

Démontrer que si $z = a + ib$ est un nombre complexe non-nul, son inverse s'écrit $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Exercice 3:

Déterminer les inverses des nombres complexes suivants :

$$3 - 4i \quad 7 \quad 3i \quad 2 + 4i \quad i$$

Exercice 4:

Soit $z_1 = 4 + i$ et $z_2 = -1 - i$ et $z_3 = 2i$ trois nombres complexes.

- Déterminer $z_1 + z_2 z_3$ et $\frac{z_1 + z_2}{z_2 + z_3}$
- Déterminer $Re(z_1 z_2 z_3)$ et $Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$
- Déterminer $Im(z_1 z_2 + z_3)$ et $Im\left(\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right)$

Exercice 5:

Pour tous complexes z et z' , démontrer que :

a. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$	d. $\frac{\overline{z}}{z'} = \frac{\overline{z}}{z'}$ si $z' \neq 0$	g. $z - \overline{z} = 2iIm(z)$
b. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$	e. $z\overline{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$	h. $\overline{\overline{z}} = z$
c. $\frac{\overline{1}}{z} = \frac{1}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$	f. $z + \overline{z} = 2Re(z)$	

Exercice 6:

Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer par récurrence que pour tout entier n non-nul, $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

Exercice 7:

Démontrer que :

- Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
- Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z + \overline{z} = 0$.

Exercice 8:

Soit $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 8i$ et $z_4 = \frac{1}{2}$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$;	d. $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4} - z_1 z_2 z_3 z_4$	f. $\frac{1}{z_1 z_2 z_3 z_4}$
b. $z_1 z_2 z_3 z_4$	e. $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4} + z_1 z_2 z_3 z_4$	g. $z_1 z_2 z_3 z_4 \overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$
c. $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$		