

## Autour de la fonction logarithme

### 1 Limites

- a. Soit  $M$  un réel strictement positif. Montrer qu'il existe  $A \in ]0; +\infty[$  tel que pour tout réel  $x > A$ ,  $\ln(x) > M$ .
- b. Conclure sur la limite de la fonction logarithme en  $+\infty$ .
- c. Montrer que pour  $x > 0$ ,  $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$ .
- d. Conclure sur la limite de la fonction logarithme en 0.

### 2 Approximations affines

- a. Soit  $a > 0$  un nombre réel fixé. Que représente la fonction  $T_a : x \mapsto \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$  pour la fonction logarithme ?  
Déterminer la limite de  $T_a$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ .
- b. En déduire  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$ .
- c. Soit  $a > 0$  un nombre réel fixé. Que représente la fonction  $T_a : h \mapsto \frac{\ln(a + h) - \ln(a)}{h}$  pour la fonction logarithme ?  
Déterminer la limite de  $T_a$  lorsque  $h$  tend vers 0.
- d. En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$ .
- e. Déterminer l'équation de la tangente  $\Delta$  à la courbe de la fonction logarithme en 1.
- f. Montrer que  $\Delta$  est au dessus de la courbe de la fonction logarithme.

### 3 Croissances comparées

- a. Déterminer la limite de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  en  $+\infty$ . On posera  $X = \ln x$ .
- b. Déterminer la limite de la fonction  $x \mapsto x \ln x$  en 0 en utilisant un raisonnement similaire.

### 4 Dérivées

- a. Soit  $x \mapsto u(x)$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  telle que  $u(x) > 0$  sur  $I$ .  
Démontrer que la fonction  $f : x \mapsto \ln[u(x)]$  est dérivable sur  $I$  et déterminer sa dérivée.
- b. Déterminer le maximum de  $f : x \mapsto \ln(x^3 + 3x^2 + 2x) - x$  sur son domaine de définition.

### 5 Primitives

- a. Soit  $x \mapsto u(x)$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  telle que  $u(x) > 0$  sur  $I$ .  
Déterminer les primitives de  $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$  sur  $I$ .
- b. Déterminer l'aire sous la courbe de la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{5}{7}$  entre  $x = -\frac{1}{5}$  et  $x = 2$ .