

# Loi normale centrée réduite

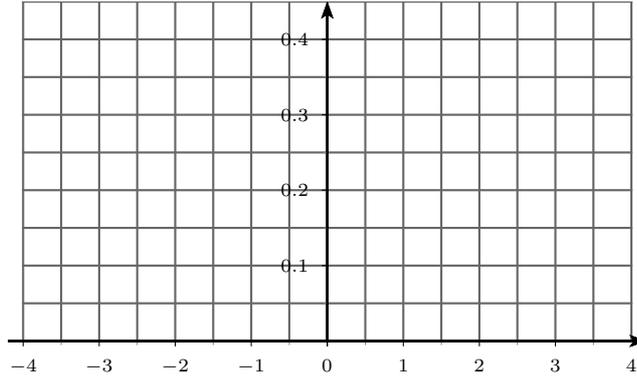
**Définition:**

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0; 1)$  si  $X$  admet pour densité  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

**Exercice 1:**

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0; 1)$ . On va déterminer dans cet exercice quelques propriétés de la fonction  $f$  qui vont nous donner des informations sur  $X$  :

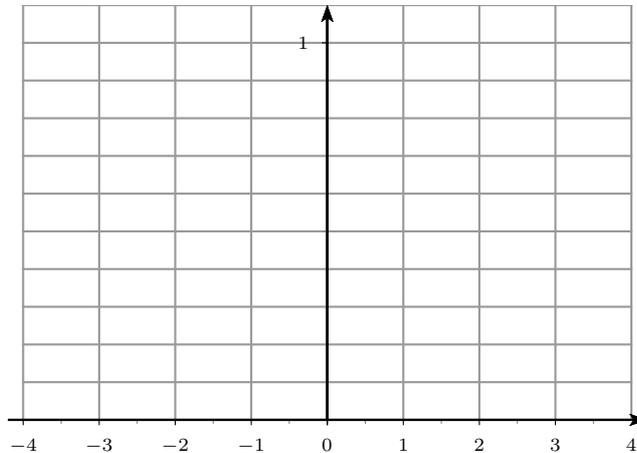
1. Tracer la courbe de la fonction  $f$  dans le repère ci-dessous :



2. Montrer que  $f$  est bien une densité (On vérifiera à la calculatrice que l'aire sous la courbe de la fonction  $f$  est égale à 1).

3. Montrer que  $f$  est paire. En déduire  $P(X \geq 0)$  et  $P(X \leq 0)$ .

4. Tracer la courbe de la fonction  $\Phi(x) = P(X \leq x)$  dans le repère ci-dessous :



$\Phi$  s'appelle la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .

5. Exprimer en fonction de  $P(X \leq x)$  les probabilités  $P(X \geq x)$ ,  $P(X \leq -x)$  et  $P(-x \leq X \leq x)$  pour  $x \in \mathbb{R}^+$ .

6. Déterminer  $P(-1 < X < 1)$ ,  $P(-2 < X < 2)$  et  $P(-3 < X < 3)$  à l'aide de respectivement  $P(X \leq 1)$ ,  $P(X \leq 2)$  et  $P(X \leq 3)$ .

**Exercice 2:**

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0; 1)$ . On va dans cet exercice démontrer le théorème suivant :

Pour tout réel  $\alpha \in ]0; 1[$ , il existe un **unique** nombre strictement positif  $u_\alpha$  tel que :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

1. Faire une figure pour illustrer ce théorème.

2. Démontrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $P(-x \leq X \leq x) = 1 - \alpha \iff \Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

3. Déterminer les variations de  $\Phi$  sur  $]0; +\infty[$  puis conclure.

4. Déterminer  $u_{0,05}$  et  $u_{0,01}$ . Interpréter graphiquement ces deux valeurs.