

Chapitre 23: Lois exponentielles et loi normale centrée réduite

1 Lois exponentielles

Définition:

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité de probabilité f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Propriété:

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ , alors :

- pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

- En utilisant l'événement contraire, $P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.

Théorème:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

On dit que une loi exponentielle est sans vieillissement ou sans mémoire.

Définition:

L'espérance mathématique (lorsqu'elle existe) d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle $[0; +\infty[$ est :

$$E(X) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x f(x) dx$$

Théorème:

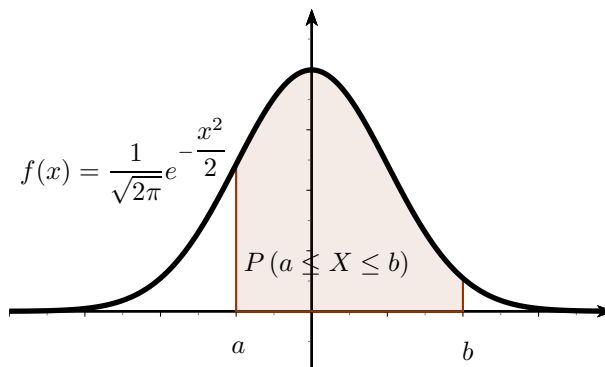
X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . Son espérance mathématique est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

2 Loi normale centrée réduite

Définition:

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ si, pour tous réels a et b , tels que $a < b$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



On dit que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$

Propriété:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. X admet donc f pour densité et :

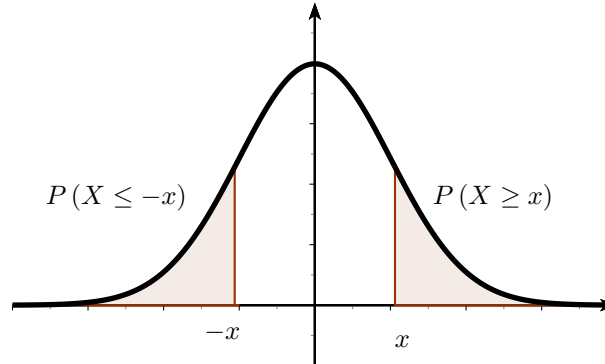
- L'aire totale sous la courbe de f est égale à 1, c'est à dire $P(X \in \mathbb{R}) = 1$;
- $E(X) = 0$; $V(X) = 1$ et $\sigma(X) = 1$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (on dit que f est paire). On peut en déduire que :

Propriété:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$:

- $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 0,5$;
- Pour tout réel x , $P(X \leq -x) = P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$;



- Pour tout réel x , $P(-x \leq X \leq x) = 2P(X \leq x) - 1$;