Forme exponentielle

1 Forme exponentielle

1. Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
   a. Indiquer la position du point d'affixe z dans le plan complexe.
   b. Déterminer l'écriture sous forme trigonométrique de z.
2. Soit f la fonction qui a tout réel θ associe le complexe $f(\theta) = cos\theta + isin\theta$. Montrer que $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ pour tout réels θ et θ'.
3. La fonction f transforme une somme en un produit, tout comme la fonction exponentielle. On définit ainsi une nouvelle écriture des nombres complexes de module 1 :
$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$
   En déduire une nouvelle écriture des nombres complexes.
   On appellera cette écriture la **forme exponentielle** du nombre complexe.
4. Donner une écriture sous forme exponentielle des nombres complexes suivants :
$$z_1 = 4 - 4i \qquad z_2 = -2i \qquad z_3 = -2\sqrt{3} + 2i \qquad z_4 = -3 \qquad z_5 = 6i$$
5. Donner l'écriture sous forme algébrique des nombres complexes suivants :
$$z_6 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad z_7 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad z_8 = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad z_9 = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \qquad z_{10} = \sqrt{2}e^{-i\pi}$$
6. Placer les points M_i d'affixes z_i dans le plan complexe en utilisant la règle et le compas.

2 Conséquences

1. Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non-nul. Démontrer que :
$$\overline{z} = re^{-i\theta} \quad ; \quad zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad ; \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \quad ; \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$
2. Soit z et z' sont deux nombres complexes non-nuls. Démontrer à l'aide des égalités ci-dessus que :
   a. $|\overline{z}| = |z|$ et $arg(\overline{z}) \equiv -arg(z)\ (mod\, 2\pi)$.
   b. $|zz'| = |z|\,|z'|$ et $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')\ (mod\, 2\pi)$.
   c. Si $z' \neq 0$; $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $arg(\frac{z}{z'}) \equiv arg(z) - arg(z')\ (mod\, 2\pi)$.
   d. Pour $z \neq 0$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg(z)\ (mod\, 2\pi)$.
   e. Pour tout entier naturel non-nul n ; $|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) \equiv n\ arg(z)\ (mod\, 2\pi)$.