Chapitre 27: Nombres complexes III

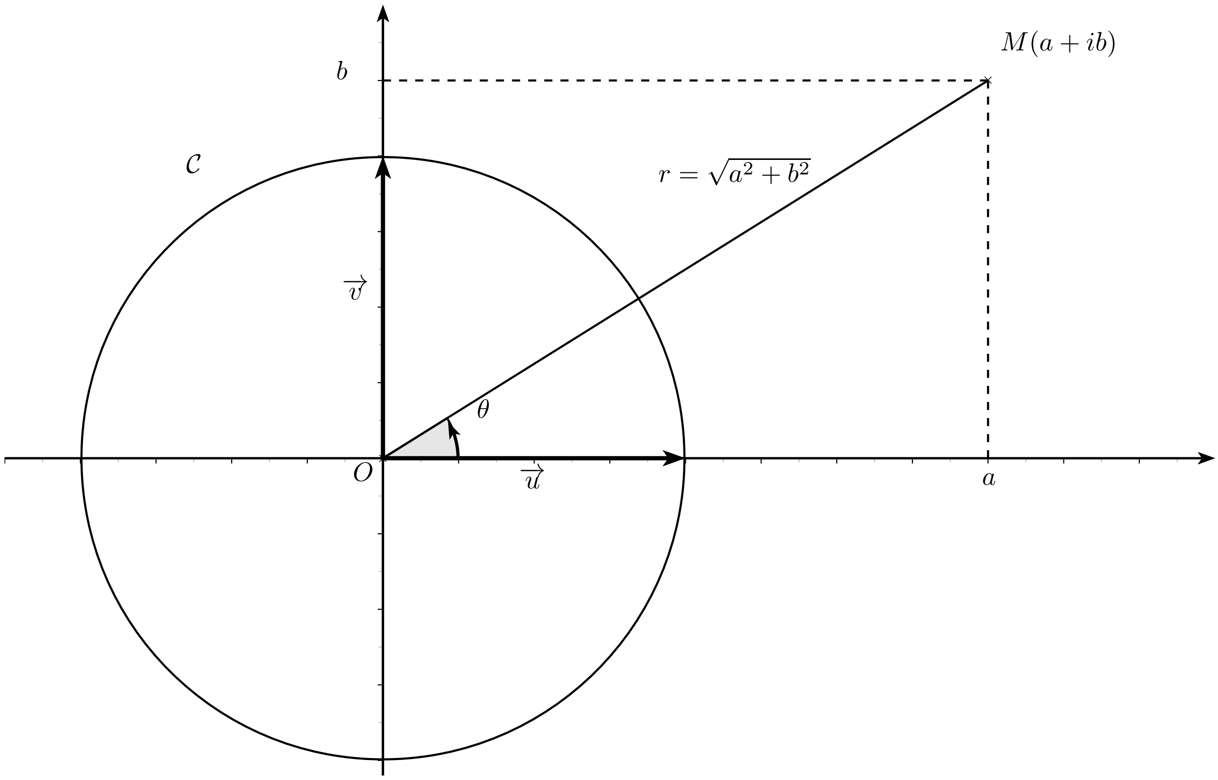
1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.1 Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère un nombre complexe non-nul $z = a + ib$ et le point M d'affixe z. La demi-droite $[OM)$ coupe le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ en A. On note alors :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta \quad \texttt{et} \quad OM = r$$

Le point A a pour coordonnées cartésiennes $(cos(\theta); sin(\theta))$ et $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OA}$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Il en résulte que le point M a pour coordonnées cartésiennes $(rcos(\theta); rsin(\theta))$



Ainsi, le nombre complexe $z = a + ib$ s'écrit aussi :

$$z = r\left(cos(\theta) + isin(\theta)\right)$$

Définition:
Soit un nombre complexe non-nul $z = a + ib$.

- *un argument de z, noté $arg(z)$, est une des mesures, exprimée en radian, de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.*
- *le module de z, noté $|z|$, est la longueur OM. On en déduit que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*
- *z s'écrit sous la forme $z = r\left(cos(\theta) + isin(\theta)\right)$ où $\arg(z) \equiv \theta\,(2\pi)$ Cette écriture est appelée forme **trigonométrique** du nombre complexe z.*

Remarque:
L'argument de z est défini modulo 2π ce qui implique la non-unicité de la forme trigonométrique.
Par exemple, pour $z = -1 + i\sqrt{3}$, on a :
$r = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$;
$cos(\theta) = -\dfrac{1}{2}$ *et* $sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *donc* $\theta \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ *d'où z admet deux formes trigonométriques possibles :*

$$z = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left[cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

.
Attention, on peut aussi montrer que $z = -2\left(cos\dfrac{4\pi}{3} + isin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ *mais cette écriture n'est pas une forme trigonométrique puisque* $r \neq -2$.

Propriété:
Deux nombres complexes non-nuls $z = r\left(cos(\theta) + isin(\theta)\right)$ et $z' = r'\left(cos(\theta') + isin(\theta')\right)$ écrits sous forme trigonométrique sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta \equiv \theta'\ (2\pi)$

1.2 De la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement

Soit z un nombre complexe non-nul tel que $\arg(z) \equiv \theta\ (2\pi)$ et $|z| = r$ alors sa forme algébrique est $z = a + ib$ avec

$$\begin{cases} a &= rcos(\theta) \\ b &= rsin(\theta) \end{cases}$$

Soit z un nombre complexe non-nul tel que $z = a + ib$ alors sa forme trigonométrique est $z = r\left(cos(\theta) + isin(\theta)\right)$ avec

$$\begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2}) \\ cos(\theta) &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin(\theta) &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

1.3 Interprétation graphique

Théorème:
Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ alors $AB = |z_B - z_A|$

Démonstration:
Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z_M donc $z_M = z_B - z_A$ soit $|z_M| = |z_B - z_A|$. Comme $OM = |z_M|$ et $AB = OM$ on en déduit que $AB = |z_B - z_A|$

Théorème:
Si A et B sont deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ alors $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A)$

Démonstration:
Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ donc $z_M = z_B - z_A$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$. Or $arg(z_M) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$ donc $arg(z_B - z_A) = arg(z_M) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$