Chapitre 27: Nombres complexes III

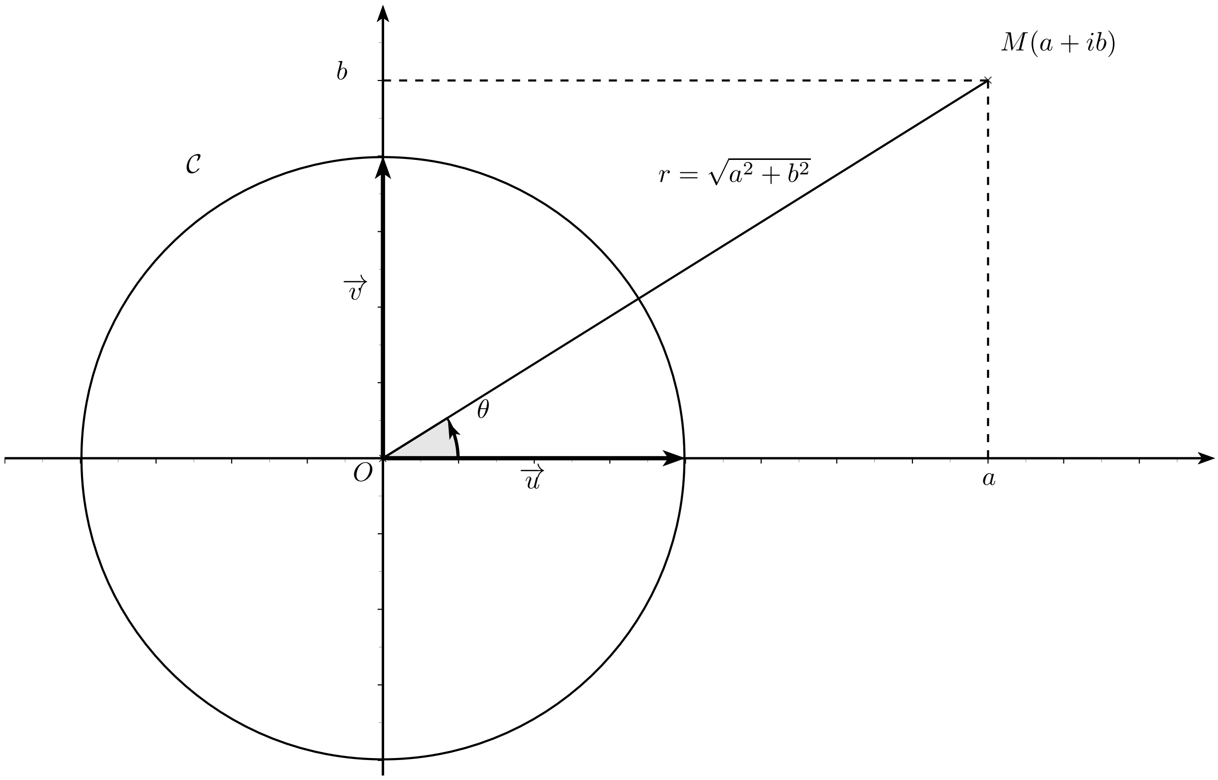
1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.1 Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère un nombre complexe non-nul $z = a + ib$ et le point M d'affixe z. La demi-droite $[OM)$ coupe le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ en A. On note alors :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta \quad \texttt{et} \quad OM = r$$

Le point A a pour coordonnées cartésiennes $(cos(\theta); sin(\theta))$ et $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OA}$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Il en résulte que le point M a pour coordonnées cartésiennes $(rcos(\theta); rsin(\theta))$



Ainsi, le nombre complexe $z = a + ib$ s'écrit aussi :

$$z = r\,(cos(\theta) + isin(\theta))$$

Définition:
Soit un nombre complexe non-nul $z = a + ib$.

- *un argument de z, noté $arg(z)$, est une des mesures, exprimée en radian, de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.*
- *le module de z, noté $|z|$, est la longueur OM. On en déduit que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*
- *z s'écrit sous la forme $z = r\,(cos(\theta) + isin(\theta))$ où $\arg(z) \equiv \theta\,(2\pi)$ Cette écriture est appelée forme* ***trigonométrique*** *du nombre complexe z.*

Remarque:
L'argument de z est défini modulo 2π ce qui implique la non-unicité de la forme trigonométrique.
Par exemple, pour $z = -1 + i\sqrt{3}$, on a :
$r = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$;
$cos(\theta) = -\dfrac{1}{2}$ *et* $sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *donc* $\theta \equiv \dfrac{2\pi}{3}\,(2\pi)$ *d'où z admet deux formes trigonométriques possibles :*

$$z = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left[cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

.
Attention, on peut aussi montrer que $z = -2\left(cos\dfrac{4\pi}{3} + isin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ *mais cette écriture n'est pas une forme trigonométrique puisque $r \neq -2$.*

Propriété:
Deux nombres complexes non-nuls $z = r\,(cos(\theta) + isin(\theta))$ et $z' = r'\,(cos(\theta') + isin(\theta'))$ écrits sous forme trigonométrique sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta \equiv \theta'\,(2\pi)$

1.2 De la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement

Soit z un nombre complexe non-nul tel que $\arg(z) \equiv \theta\,(2\pi)$ et $|z| = r$ alors sa forme algébrique est $z = a + ib$ avec

$$\begin{cases} a = rcos(\theta) \\ b = rsin(\theta) \end{cases}$$

Soit z un nombre complexe non-nul tel que $z = a + ib$ alors sa forme trigonométrique est $z = r\,(cos(\theta) + isin(\theta))$ avec

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

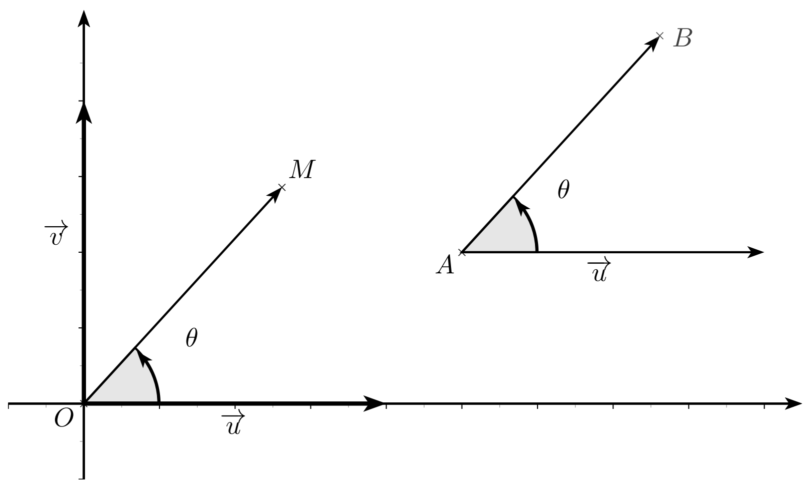
1.3 Interprétation graphique

Théorème:
Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ alors $AB = |z_B - z_A|$

Démonstration:
Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z_M donc $z_M = z_B - z_A$ soit $|z_M| = |z_B - z_A|$. Comme $OM = |z_M|$ et $AB = OM$ on en déduit que $AB = |z_B - z_A|$

Théorème:
Si A et B sont deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ alors $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A)$

Démonstration:
Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ donc $z_M = z_B - z_A$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$. Or $arg(z_M) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$ donc $arg(z_B - z_A) = arg(z_M) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$



2 Notation exponentielle

2.1 Définition

Définition:
Tout nombre complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$$

Exemple:

$$e^{i\dfrac{\pi}{2}} = i$$

et

$$e^{i\dfrac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Théorème:
*Tout nombre complexe non-nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite forme **exponentielle** :*

$$z = re^{i\theta}$$

Démonstration:
Tout nombre complexe non-nul admet une écriture sous forme trigonométrique de la forme $r\,(cos(\theta) + isin(\theta))$. Or $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$ donc z s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$.

Propriété:
Deux nombres complexes non-nuls $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ écrits sous forme exponentielle sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta \equiv \theta'\,(2\pi)$

Propriété:
Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non-nuls alors :

$$\overline{z} = re^{-i\theta} \quad ; \quad zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad ; \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \quad ; \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

2.2 Conséquences

Dans tout ce paragraphe z et z' sont deux nombres complexes non-nuls.

Théorème:
$|\overline{z}| = |z|$ *et* $arg(\overline{z}) \equiv -arg(z)\ (2\pi)$.

Théorème:
$|zz'| = |z|\,|z'|$ *et* $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')\ (2\pi)$.

Conséquences : Pour tout entier naturel non-nul n ; $|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) \equiv n\ arg(z)\ (2\pi)$.

Théorème:
$|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ *et* $arg(\frac{z}{z'}) \equiv arg(z) - arg(z')\ (2\pi)$.

Conséquences : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -arg(z)\ (2\pi)$