Exercices

Exercice 1:

1. Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ les équations ci-dessous :
   a. $sin(x) = \dfrac{-1}{2}$
   b. $cos(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   c. $sin(3x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ les inéquations ci-dessous :
   a. $cos(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   b. $sin(2x) \geq \dfrac{-1}{2}$
   c. $\sqrt{2}\,cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) \leq 1$

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

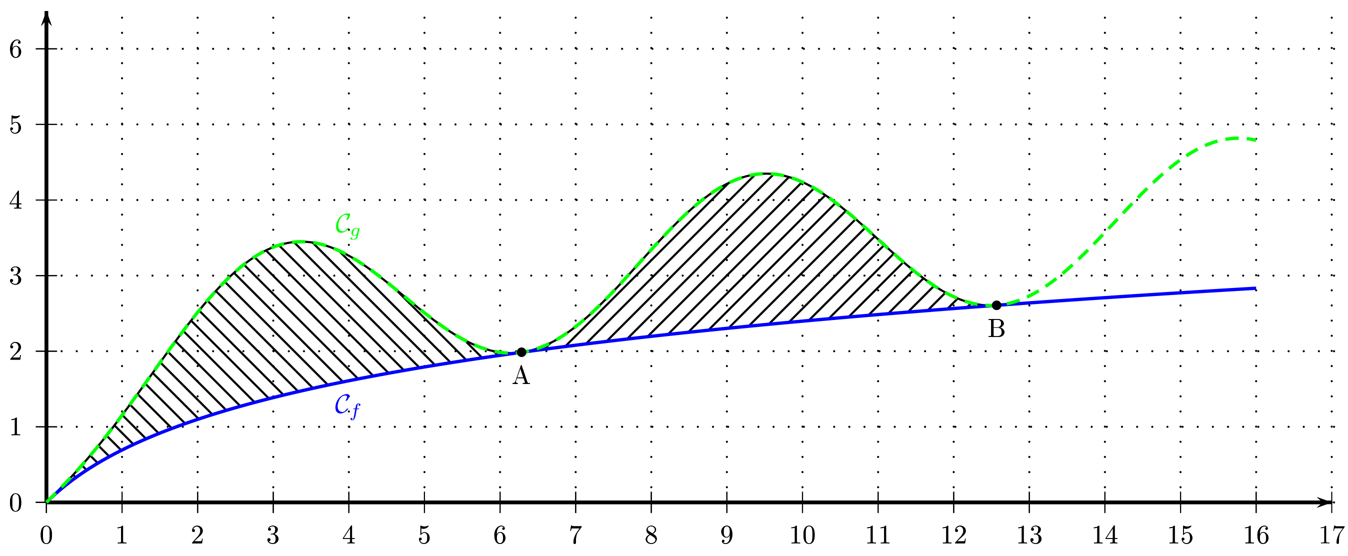
1. Démontrer que f est périodique de période π.
2. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
3. Résoudre $f(x) > 0$ sur $[0;2\pi]$.
4. Étudier les variations de f sur $[0;\pi]$.
5. Tracer la courbe de f sur cet intervalle.

Exercice 3:

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans le repère du plan ci-dessous, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

Exercice 4:

Soit $u = 1 - \mathrm{i}$ un nombre complexe.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre u.
2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{i})$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 5:

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$. Les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données ci-dessous :

1. Conjecturer :
   a. les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
   b. la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$;
   c. la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est maximal.
2. Justifier que $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
4. a. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
   $$h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$$
   b. Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.
5. On admet que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction H définie par
   $$H(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2 + \cos(x) - \sin(x)]$$
   est une primitive de la fonction h. On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.