Chapitre 5: Étude de limites

1 Opérations sur les limites

1.1 Limite d'une somme

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels. a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et la limite de g en a est	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors la limite de $(f + g)$ en a est						

FI signifie **forme indéterminée**, c'est à dire qu'on doit effectuer une étude particulière pour déterminer la limite de $(f + g)$.

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2 = \dots \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = \dots \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2 - \sqrt{x} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \dots \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \dots \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + \frac{1}{x} = \dots$$

1.2 Limite d'un produit

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels. a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et la limite de g en a est	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors la limite de $(f \times g)$ en a est									

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \dots \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = \dots \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 \sqrt{x} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} = \dots \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{1}{x} = \dots \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + \frac{1}{x})(3 + \frac{1}{x}) = \dots$$

1.3 Limite d'un quotient

On distingue ici deux cas :

le dénominateur a une limite non-nul :

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels. a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et la limite de g en a est	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
alors la limite de $\frac{f}{g}$ en a est							

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \dots \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{1}{x} = \dots \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{-2 + \frac{1}{x}} = \dots$$

le dénominateur a une limite nul :

Théorème:

Dans le tableau suivant, l est un réel non-nul, a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0
et la limite de g en a est	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors la limite de $\frac{f}{g}$ en a est					

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \dots \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + 7 = \dots \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 7}{\sqrt{x}} = \dots$$

1.4 Formes indéterminées

D'après ce qui a été vu précédemment, on compte quatre formes indéterminées :

$$">\infty - \infty"$$

$$">0 \times \infty"$$

$$">\frac{\infty}{\infty}"$$

$$">\frac{0}{0}"$$

Dans ce cas, il faut faire une étude particulière pour "lever l'indétermination".