

Chapitre 5: Étude de limites

1 Opérations sur les limites

1.1 Limite d'une somme

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels. a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

<i>Si la limite de f en a est</i>	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
<i>et la limite de g en a est</i>	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
<i>alors la limite de $(f+g)$ en a est</i>	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

FI signifie **forme indéterminée**, c'est à dire qu'on doit effectuer une étude particulière pour déterminer la limite de $(f+g)$.

Exemple:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2 - \sqrt{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + \frac{1}{x} = +\infty \end{aligned}$$

1.2 Limite d'un produit

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels. a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

<i>Si la limite de f en a est</i>	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
<i>et la limite de g en a est</i>	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
<i>alors la limite de $(f \times g)$ en a est</i>	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 \sqrt{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 6 \end{aligned}$$

1.3 Limite d'un quotient

On distingue ici deux cas :

le dénominateur a une limite non-nul :

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels. a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

<i>Si la limite de f en a est</i>	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
<i>et la limite de g en a est</i>	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
<i>alors la limite de $\frac{f}{g}$ en a est</i>	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{1}{x} = -2 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{-2 + \frac{1}{x}} = -\infty$$

le dénominateur a une limite nul :

Théorème:

Dans le tableau suivant, l est un réel non-nul. a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0
et la limite de g en a est	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors la limite de $\frac{f}{g}$ en a est	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + 7 = 7 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 7}{\sqrt{x}} = +\infty$$

1.4 Formes indéterminées

D'après ce qui a été vu précédemment, on compte quatre formes indéterminées :

$${}^{\circ}\infty - \infty{}^{\circ} \quad {}^{\circ}0 \times \infty{}^{\circ} \quad {}^{\circ}\frac{\infty}{\infty}{}^{\circ} \quad {}^{\circ}\frac{0}{0}{}^{\circ}$$

Dans ce cas, il faut faire une étude particulière pour "lever l'indétermination".

2 Théorèmes de comparaison

Théorème: (Théorème des gendarmes)

Soit f , u et v trois fonctions définies sur $]A; +\infty[$.

$$\text{Si } u(x) \leq f(x) \leq v(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

Démonstration:

Soit I un intervalle ouvert contenant l .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l$ donc il existe un réel M tel que pour tout $x > M$; $u(x) \in I$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$ donc il existe un réel M' tel que pour tout $x > M'$; $v(x) \in I$.

Si on note M'' le plus grand de A , M et M' alors pour tout $x > M''$; $f(x) \in I$. On en déduit donc que f tend vers l en $+\infty$.

Théorème: (Théorème de comparaison)

Soit f et g deux fonctions définies sur $I =]A; +\infty[$.

- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$;
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

Remarque:

On a des propriétés similaires dans le cas de limite en $-\infty$ et en un réel a .

3 Limite d'une fonction composée

Définition:

La fonction f est appelée la composée de la fonction u suivie de la fonction v , si on a :

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} f(x) = v[u(x)] \\ \underbrace{\hspace{10em}}_f \end{array}$$

On note $f = v \circ u$

Théorème:

a , b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$. u , v et f désignent des fonctions telles que $f = v \circ u$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow b} v(X) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

Exemple:

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{x}}$.

Posons $X = 2 + \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2}$$