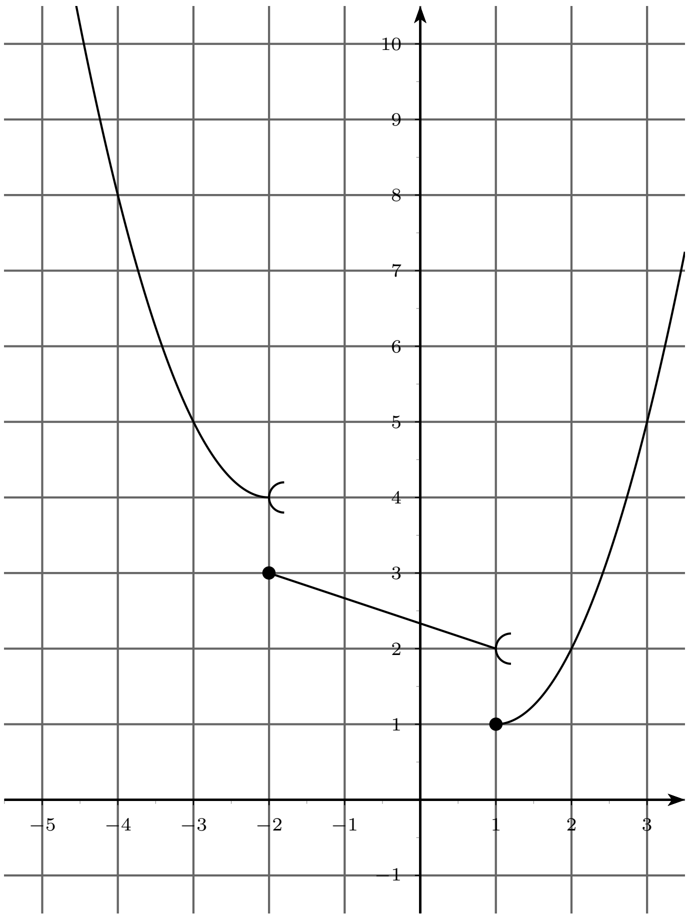
Une histoire de continuité

1 Une fonction définie par morceaux

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 8 \text{ si } x \in]-\infty\ ;\ -2[\\ -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3} \text{ si } x \in [-2\ ;\ 1[\\ x^2 - 2x + 2 \text{ si } x \in [1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



1. a. Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f(-1)$, $f(3)$, $f(-2)$ et $f(1)$.
   b. Retrouver ces images par le calcul.
2. a. Déterminer $f(-2)$, $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$. Que remarque-t-on ?
   b. Reprendre la question précédente pour $f(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.
   c. Était-ce prévisible en observant le graphique ?

   On dit que la fonction f n'est pas continue en -2 et 1.

3. À votre avis, existe-t-il d'autres valeurs de x pour lesquelles les limites à droite et à gauche sont différentes ?

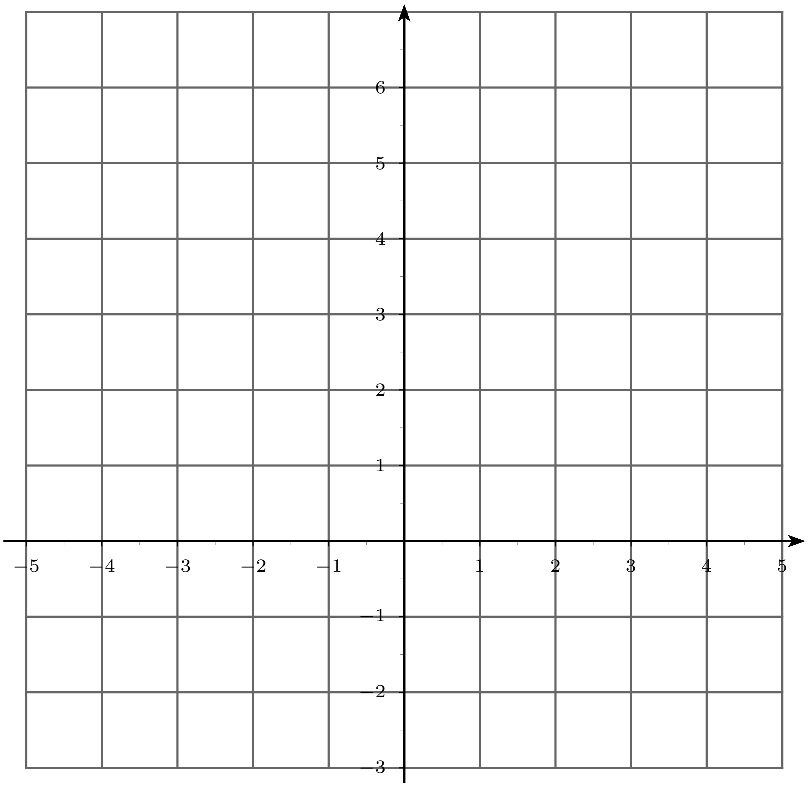
   On dit que la fonction f est continue en toutes les valeurs de x différentes de -2 et 1.

2 Continue ou non ?

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2+4x+2 \text{ si } x \in]-\infty\ ;\ 0] \\ -x^2+4x+2 \text{ si } x \in]0\ ;\ 3] \\ -x^2+6x-4 \text{ si } x \in]3\ ;\ +\infty[\end{cases}.$$

1. En quelles valeurs de x les limites à droite et à gauche de la fonction g peuvent-elles éventuellement être différentes ?
2. Tracer la courbe représentative de la fonction g sur le graphique ci-dessous :



3. a. D'après le graphique, quelles conjectures peut-on faire sur les limites à droite et à gauche en les valeurs trouvées à la question 1 ?
   b. Calculer ces limites.
4. Que peut-on dire sur la continuité de la fonction g ?

3 À vous de jouer

On donne la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} x^2+5x+3 \text{ si } x \in]-\infty\ ;\ -2[\\ \ldots\ldots\ldots \text{ si } x \in [-2\ ;\ 1] \\ 2x^2-3x+2 \text{ si } x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}.$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to -2^-} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$.
2. On suppose que l'expression de $h(x)$ sur $[-2\ ;\ 1]$ est de la forme $ax+b$.
   Trouver cette expression pour que h soit continue en -2 et 1.
3. On suppose maintenant que l'expression de $h(x)$ sur $[-2\ ;\ 1]$ est de la forme ax^2+bx+c.
   Trouver cette expression pour que h soit continue en -2 et 1 et que sa courbe passe par l'origine.