Devoir maison 2

Exercice 1:

6 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{1 - x^2}$.

1. Déterminer l'image de -2 par f .
2. Déterminer les antécédents de 2 par f .
3. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.
4. En déduire l'existence d'éventuelle(s) asymptote(s).
5. Déterminer les variations de la fonction f .

Exercice 2:

6 points

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires. La totalité de la production est réalisée par deux machines M_A et M_B .

- La machine M_A fournit 40 % de la production totale et M_B le reste.
- La machine M_A produit 2 % de médailles défectueuses et la machine M_B produit 3 % de médailles défectueuses.

On prélève au hasard une médaille produite par l'entreprise et on considère les événements suivants :

- A : « la médaille provient de la machine M_A » ;
- D : « la médaille est défectueuse » .

1. a. Traduire cette situation par un arbre pondéré.
b. Montrer que la probabilité qu'une médaille soit défectueuse est égale à $0,026$.
c. Calculer la probabilité qu'une médaille soit produite par la machine M_A sachant qu'elle est défectueuse.
2. Les médailles produites sont livrées par lots de 20. On prélève au hasard un lot de 20 médailles dans la production. On suppose que la production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. Les tirages sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de médailles défectueuses contenues dans ce lot.
 - a. Préciser la loi que suit X et donner ses paramètres.
 - b. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une médaille défectueuse dans ce lot

Exercice 3:

8 points

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_{n+1} = 3v_n(1 - v_n)$$

1. Posons $v_0 = \frac{4}{3}$
 - a. Calculer v_1 , v_2 et v_3 .
 - b. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $v_n \leq -1$.
 - c. Conjecturer la limite de la suite (v_n) .
2. Posons $v_0 = \frac{3}{4}$
 - a. Calculer v_1 et v_2 .
 - b. Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = x$ et la courbe d'équation $y = 3x(1 - x)$.
 - c. Placer v_0 sur l'axe des abscisses et construire sur cet axe v_1 , v_2 et v_3 (laisser les traits de construction).
 - d. Montrer par récurrence que pour tout entier n , $0 < v_n < 1$.
 - e. Conjecturer la limite de la suite (v_n) .
 - f. Résoudre sur $]0; 1[$ l'équation $3x(1 - x) = x$. Que remarque-t-on ?